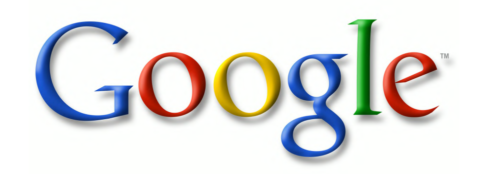
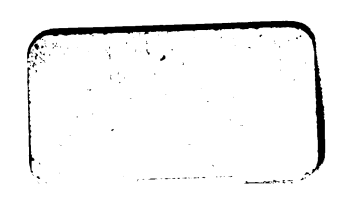




Grundriß

der ebenen und sphärischen

Trigonometrie,

entworfen

von

Dr. Christian Ludwig Gerling.

Mit drei Kupfertafeln und einer Beilage.

Göttingen,
bei Vandenhoek und Ruprecht.
1815.

QA
531
.G37

Göttingen, gedruckt bei Christian Herbst.

Vorrede.

Das vorliegende Büchlein ist zunächst bestimmt, als Grundlage beim mündlichen Unterrichte von Anfängern in der Trigonometrie gebraucht zu werden. Diesem Zwecke gemäß suchte ich den Inhalt sowol als den Vortrag einzurichten. Zu beurtheilen in wie fern mir dieses gelungen sey, muß ich, wie billig, Männern von reiferer Erfahrung überlassen; doch sei es mir erlaubt, einiges über die Grundsätze zu sagen, die mich bei Abfassung dieses Grundrisses leiteten.

Man muß, so scheint es mir, beim Unterrichte in der Mathematik immer zwei Gesichtspunkte vorzüglich ins Auge fassen, einen allgemeinen — vermöge dessen der Zuhörer mit dem Wesen der Wissenschaft vertraut gemacht, an strenges folgerichtiges und selbstthätiges Denken gewöhnt, und in den Stand gesetzt werden soll, selbstständig weiter fortzuschreiten — einen besonderen, indem er sich dabei einen Vorrath von Kenntnissen erwerben soll, von denen er in seinen künftigen Berufsgeschäften nützliche Anwendungen machen kann.

Der erste dieser Gesichtspunkte erfordert besonders recht bestimmte und deutliche Grundbegriffe. Ich habe mich demnach bemüht, dieselben möglichst klar und allgemein zu entwickeln, und dabei hin und wieder Winke zu geben gesucht, wodurch der Lehrling zu noch weiterer Entwicke-

lung und Ausführung aufgemuntert werde. Ein vorzügliches Hülfsmittel dazu schien mir zu seyn, so viel möglich alles auf Anschauung zu gründen oder zurückzuführen. Deswegen stellte ich z. B. bei den Erklärungen der verschiedenen trigonometrischen Hülfsgrößen dieselben anfangs immer bloß als Linien dar, und zeigte erst nachher, wie dieselben auch als bloße Zahlen gedacht werden können.

Des allgemeinen Zwecks des Unterrichts wegen suchte ich auch, durch die den trigonometrischen Gleichungen beigefügten geometrischen Constructionen, darauf aufmerksam zu machen, wie Arithmetik und Geometrie immer Hand in Hand gehen müssen, und wie man geometrische Wahrheiten, obwohl auf arithmetischem Wege erkannt, doch durch Construction wieder versinnlichen könne. Der

Anfänger wird so am besten Zutrauen zur analytischen Lehrweise gewinnen, und doch zugleich gewöhnt werden, sich einem bloßen Zeichenspiel nicht blindlings anzuvertrauen.

Aus derselben Ursache endlich suchte ich in der sphärischen Trigonometrie den Anfänger zu gewöhnen, daß er sich das sphärische Dreieck immer mit und in der ganzen Kugel denke; indem ich mich durch Erfahrung überzeugt zu haben glaube, daß die meisten Schwierigkeiten und Irrthümer, denen ein Anfänger in der sphärischen Trigonometrie ausgesetzt ist, aus einer mangelhaften Anschauung des sphärischen Dreiecks entspringen.

Auf der andern Seite habe ich mich bemüht, von den Anwendungen der allgemeinen trigonometrischen Lehren das nothwendigste und wesentlichste vollstän-

dig vorzutragen, so daß ich glaube, wer dieses gründlich gefaßt, und eingeübt hat, werde bei künftiger Ausübung nicht in Verlegenheit gerathen können. Mehr noch beizufügen schien mir unthunlich, ohne die Gränzen eines Lehrbuchs für den Unterricht der Anfänger zu überschreiten.

Um die Auflösung der Dreiecke übersichtlicher und geläufiger zu machen, sind jedesmal Rechnungsbeispiele beigefügt, bei welchen so viel möglich für Kürze und zweckmäßige Anordnung gesorgt ist, denn die Gewöhnung an eine bestimmte und gut gewählte Anordnung, hat in der Anwendung unläugbare Vortheile. — Die Rechnungen sind übrigens alle mit Vegas logarithmisch-trigonometrischem Handbuche, Leipzig 1800. (von welchem 1812 ein neuer Abdruck erschienen ist) geführt, weil ich voraussetzen durfte, daß sich die-

ses am meisten in den Händen der Anfänger finden würde. — Es ist dabei immer nach grösserer Genauigkeit gestrebt als nöthig, und selbst bei diesen Tafeln, die nur auf einzelne Minuten gehen, erreichbar war, indem selbst auf die Hundertel von Sekunden noch Rücksicht genommen wurde. Es bekommt aber eben dadurch ein Anfänger Gelegenheit zu sehen, wie große Genauigkeit sich mit diesen Tafeln erlangen läßt, indem die Abweichungen bei den im Buche angeführten Beispielen immer nur in den Brüchen von Sekunden merkbar werden, z. B. (82) und (89).

Was das Aeußere des Vortrags betrifft, so habe ich der Kürze und Gleichförmigkeit wegen, die herkömmliche Form, wo jeder Satz mit Lehrsatz, Aufgabe u. s. w. überschrieben ist, bei Seite gesetzt, ohne zu befürchten, daß die Brauchbarkeit des Buches

dadurch leiden würde; denn so sehr ich auch einerseits von dem Nutzen dieser Form beim ersten Unterrichte überzeugt bin, indem sie gewiß viel dazu beiträgt, die Uebersicht zu erleichtern; so sehr bin ich auch auf der andern Seite überzeugt, daß sich der angehende Mathematiker nicht an sie verwöhnen darf, damit er die mathematische Strenge nicht gleich zu vermissen glaube, wenn die Wahrheiten auch etwas anders eingekleidet sind. — Die meisten Beweise sind übrigens mehr angedeutet als ausgeführt, damit dem mündlichen Vortrag die so nothwendige Freiheit und Lebendigkeit bleibe, und der Lehrling bei etwaniger Vorbereitung Gelegenheit habe, seine eigenen Geisteskräfte zu üben.

Es ist in diesem Grundriß weiter nichts vorausgesetzt als was von der Planimetrie, von den Linien und Ebenen im Raume und der gemeinen Al-

gebra in den meisten Lehrbüchern vorkommt; nur ein Paar ganz leichte Sätze, die ich mich nicht erinnere, in einem Lehrbuche gelesen zu haben, habe ich in der sphärischen Trigonometrie gebraucht, welche es mir erlaubt sey, für die Anfänger hieher zu setzen. Die Beweise dafür lassen sich leicht aus bekannten Sätzen ableiten.

I. Wenn zwei Winkel im Raume parallele Schenkel haben; so sind sie nicht nur gleich, sondern auch ihre Ebenen sind parallel.

II. Der Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene ist der kleinste Winkel, den dieselbe mit Linien in der Ebene macht.

III. Der Neigungswinkel zweier Ebenen gegen einander ist größer, als jeder Winkel, welchen zwei andere gerade Linien, die von einem Punkte der

Durchschnittslinie ausgehen und mit einer ihrer Seiten spitze Winkel bilden, mit einander einschließen.

Daß ich bei Abfassung dieses Grundrisses andere Schriften benutzt habe und benutzen mußte, bedarf wohl bei einem Buche dieser Art keine Erwähnung. Doch habe ich dabei überall nach einer gleichförmigen und zweckmäßigen Darstellung gestrebt. In einigen nicht unwichtigen Punkten der sphärischen Trigonometrie, besonders in den Lehren von den entgegengesetzten Dreiecken, von den Polardreiecken und von den zweideutigen Fällen, schien mir indessen in den wenigen Lehrbüchern, die ich nachzuschlagen Gelegenheit hatte, nicht die nöthige Bestimmtheit und Klarheit zu herrschen, wodurch ich genöthigt war, ganz meinen eigenen Weg zu gehen.

Möge denn auch dieses Schriftchen sein Schärfstein dazu beitragen, mathematische Wahrheiten weiter auszubreiten, und die eben so alberne, als einem jeden Gelehrten unanständige Meinung zu bekämpfen, als enthielten selbst die Anfangsgründe der Mathematik eine gar gewaltig schwere, nur wenigen Auserwählten zugängliche Lehre.

Cassel, im April 1815.

G.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Erstes Kapitel.

Erklärung der trigonometrischen Hülfsgrößen.

1. Der Zweck der Trigonometrie besteht darin, durch Rechnung die unbekannten Seiten und Winkel eines Dreiecks aus den bekannten zu finden. Sie bedient sich dazu gewisser Hülfsgrößen, durch welche Schlüsse von Winkeln oder Bögen auf gerade Linien und umgekehrt möglich gemacht werden sollen. Diese Hülfsgrößen und ihre Eigenschaften kennen zu lehren, ist also ihre erste Aufgabe.

I. Sinus und Cosinus.

2. Wenn in einem gegebenen Kreise Fig. 1. ein Bogen AE, der in A anfängt und sich nach D hin ausdehnt, als bestimmt gedacht werden soll; so ist dazu nöthig, daß auch sein Endpunkt E bestimmt sey. Zu dieser Bestimmung bedient man sich aber seiner perpendikularen Abstände EF und FC (oder EG) von zweien auf einander gleichfalls perpendikularen Halbmessern AC und CD, deren erster durch den Anfangs-

punkt des Bogens selbst geht. Den Abstand EF (oder CG) von dem ersten Halbmesser nennt man den Sinus des Bogens, den Abstand FC (oder EG) seinen Cosinus.

3. Doch ist es zur Bestimmung des Bogens noch nicht hinreichend, bloß die Länge von seinem Sinus und Cosinus zu kennen: denn wenn man in dem Kreise Fig. I. $CI = CF$ und $CL = CG$ macht, und durch die Punkte I und L Parallelen mit EF und FC zieht; so haben die Bögen AE, AEH, $AEHK$, $AEHKM$ lauter Sinus und Cosinus von gleicher Länge. — Offenbar sind aber EF und MF (oder CG und CL), so wie CF und CI dadurch wesentlich unterschieden, daß ihre Verbindung mit derselben dritten Linie, z. B. mit den Halbmessern NC oder BC durch die entgegengesetzten Operationen des Hinzusetzens und Abnehmens bewerkstelligt werden müssen: also erscheinen sie als geometrische Beispiele von entgegengesetzten Größen, und es ist außer ihrer Länge auch noch diese Beziehung, oder ihre Lage gegen die ursprünglich auf einander senkrechten Halbmesser zu betrachten.

4. Nimmt man nun die Sinus und Cosinus (x und y) eines Bogens im ersten Quadranten als positiv an; so werden im zweiten die Sinus positiv bleiben, die Cosinus negativ werden: im dritten bleiben die Cosinus negativ, die Sinus werden es aber auch: im vierten endlich bleiben die Sinus negativ, die Cosinus sind aber wieder positiv.

Also $\sin AE = +x$; $\sin AEH = +x$;
$\cos AE = +y$; $\cos AEH = -y$;
$\sin AEHK = -x$; $\sin AEHKM = -x$
$\cos AEHK = -y$; $\cos AEHKM = +y$

5. Da zusammengehörige Sinus und Cosinus immer Katheten eines rechtwinklichen Dreiecks sind, dessen Hypotenuse dem Halbmesser gleich ist; so kann man, wenn die Länge von einer dieser beiden Linien bekannt ist, die Länge der andern daraus berechnen, durch die Formeln:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\text{rad}^2 - \sin\alpha^2}$$

und $$\sin\alpha = \pm\sqrt{\text{rad}^2 - \cos\alpha^2} \;*)$$

Die Länge des Sinus oder des Cosinus, und das Zeichen des Sinus und des Cosinus bestimmen also einen, und nur einen Bogen, insofern man den Begriff des Bogens nicht über eine Peripherie ausdehnt. In diesem letzten Falle kehrt die vorige Abwechselung wieder; so daß es also in Beziehung auf diese trigonometrischen Linien erlaubt ist, dem Bogen jedes beliebige Vielfache der Peripherie hinzuzufügen.

6. Wenn man Fig. 1. den Bogen AE als einen positiven Bogen betrachtet; so wird in Beziehung auf ihn AM negativ seyn. Sinus und Cosinus dieses ne-

*) Das Zeichen $\sin\alpha^2$ ist gleichbedeutend mit $(\sin\alpha)^2$. Manche, besonders französische, Schriftsteller gebrauchen auch dafür das Zeichen $\sin^2\alpha$, welches man aber streng genommen so verstehen könnte, als drückte es den Sinus eines Bogens aus, welcher der Länge nach dem Sinus von α gleich wäre.

gativen Bogens finden sich der Länge nach gleich, nur der erste dem Zeichen nach verschieden. Diese Vergleichung läßt sich durch alle Quadranten durchführen; daher der allgemeine Satz: negative Bögen haben der Länge nach dieselben Sinus und Cosinus wie ihre entsprechenden positiven: nur ändern die Sinus ihr Zeichen. — Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn man zu einem negativen Bogen immer eine Peripherie, oder ein Vielfaches davon hinzufügt, und ihn dadurch positiv macht.

7. Jedem Bogen entspricht nur ein Winkel am Mittelpunkt (der also nach (5) bis 360° und darüber wachsen kann) durch die trigonometrischen Linien wird also auch dieser Winkel bestimmt; man pflegt deswegen auch die Benennungen überzutragen, und Sinus und Cosinus geradezu als Bestimmungsstücke eines Winkels zu gebrauchen.

8. Sinus und Cosinus können nie größer werden als der Halbmesser des Kreises, wird also dieser als Einheit betrachtet; so müssen sie durch ächte Brüche ausgedrückt werden: doch pflegt man der Gleichförmigkeit wegen die Benennungen auch da noch zu gebrauchen, wo es streng genommen keinen Sinus und Cosinus mehr giebt, d. h. wenn der Endpunkt des Bogens mit den ursprünglichen senkrechten Halbmessern zusammenfällt, und zu sagen:

$$\sin 0° = \mp 0 \qquad \cos 0° = +1$$
$$\sin 90° = +1 \qquad \cos 90° = \pm 0$$

$\sin 180° = \pm 0 \qquad \cos 180° = -1$

$\sin 270° = -1 \qquad \cos 270° = \mp 0$ *)

Daher ist auch die Benennung sinus totus für den Halbmesser entstanden.

9. Sinus und Kosinus [illegible] denen Kreisen, (ähnlicher Bögen), verhalten sich wie die Halbmesser. Betrachtet man also einen Halbmesser als Einheit oder Maaß, und seine Sinus und Cosinus als gegeben; so kann man diese sehr leicht auf einen zweiten Kreis übertragen, wenn man sie mit der Zahl multiplicirt, durch die sein Halbmesser in Beziehung auf dasselbe Maaß (den Halbmesser des ursprünglichen Kreises) ausgedrückt wird. Ist umgekehrt eine dieser Größen als Länge gegeben; so kann man sie leicht

*) Absichtlich sind hier dem o, welchem eigentlich niemals Zeichen zukommen können, die doppelten Zeichen $\pm$ oder $\mp$ vorgesetzt, je nachdem in diesen Punkten der Peripherie, bei immer wachsenden Bögen, ein Uebergang der Sinus oder Cosinus aus dem positiven ins negative oder umgekehrt statt findet. Man übersieht hierbei auf einmal das Zeichen dieser Größen, so wie auch ihr Abnehmen oder Zunehmen für zwischenliegende Bögen.

Man darf aber bei dergleichen uneigentlichen Bezeichnungen oder Ausdrücken nie vergessen, daß sie nur Zeichen und Redensarten sind, über deren Bedeutung man sich vorher verständigt haben muß, und die alsdann oft zur Abkürzung sehr nützlich seyn können. Sobald man diese Vorsicht versäumt, ist schon bei den gewöhnlichsten Ausdrükken der Art (z. B. $\sqrt{a^2} = \pm a$) die Gefahr vorhanden, in Ungereimtheiten zu verfallen.

als Zahl ausdrücken, wenn man sie durch den in demselben Maaße ausgedrückten Halbmesser dividirt. *)

10. Die Sinus und Cosinus bekommen der Länge nach schon im ersten Quadranten, je nachdem der Punkt F von A aus näher oder entfernter ist, in Beziehung auf den Halbmesser alle Längen, die sie je bekommen können (zwischen 0 und 1): für Bögen in den folgenden Quadranten können sie leicht gefunden werden, wenn man sie im ersten Quadranten als bekannt annimmt. Denn es sey α ein Bogen $< 90°$ (im ersten Quadranten); so ist mit Rücksicht auf (3) und (4) allgemein

a) $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ b) $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

c) $\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$

11. Man kann leicht 1) diese Formeln in Worte übersetzen; 2) sie weiter ausdehnen nach (5); 3) das in (6) von negativen Bögen Gesagte darauf anwenden. Setzt man z. B. in (b) α negativ; so wird

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

d. h. Winkel oder Bögen, die einander zu 180° ergänzen (Supplemente von einander sind), haben gleich große nicht entgegengesetzte Sinus, und gleich große aber entgegengesetzte Cosinus.

*) Es bedarf wohl keiner Erinnerung, daß hierbei Irrationalgrößen auch als Zahlen betrachtet, und in der Ausführung durch fortlaufende, nicht periodische Dezimalbrüche dargestellt werden.

Setzt man in (a) α negativ, so wird

$$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$
$$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

d. h. der Cosinus eines Winkels oder Bogens ist gleich dem Sinus seiner Ergänzung zu 90° (seines Complements) und umgekehrt.

Beides ergiebt sich auch leicht durch geometrische Betrachtung.

II. Tangenten und Cotangenten.

12. Zieht man in dem Anfangspunkt *A* eines Bogens *AE* Fig. 2. eine Berührungslinie, und verlängert den nach dem Endpunkt *E* gezogenen Halbmesser *CE*, bis er die Berührungslinie in *R* schneidet; so heißt das zwischen *A* und *R* enthaltene Stück derselben die Tangente des Bogens *AE* oder des Winkels *ACE*.

13. Ist der Bogen im zweiten Quadranten z. B. *AEH*; so wird der Halbmesser *CH* in seiner Verlängerung, auch von der Berührungslinie nur die Verlängerung in *T* treffen: die Tangente *AT* eines solchen Bogens ist also in Beziehung auf Tangenten der Bögen des ersten Quadranten als negativ zu betrachten. Ein Bogen im dritten Quadranten *AEHK* hat wieder die positive Tangente *AR*: im vierten Quadranten endlich gehört zu dem Bogen *AEHKM* die negative Tangente *AT*.

Wäre die Länge der Tangente allein gegeben; so könnten ihr vier verschiedene Bögen zugehören: ist ihre Länge und Lage oder Zeichen gegeben; so bleibt nur

die Wahl zwischen zwei Bögen. Kennt man aber außerdem noch das Zeichen des Sinus oder Cosinus, so ist nur ein Bogen bestimmt. — Es lassen sich auch leicht Vergleichungen zwischen dem Zeichen der Tangente und denen der Sinus und Cosinus anstellen.

14. Im ersten Quadranten wächst die Tangente mit dem Bogen, und zwar so sehr, daß wenn *E* und *D* zusammenfallen, es gar keine Tangente mehr giebt, weil *EC* und *AR* parallel werden. Man bedient sich alsdann aber der Kürze und Gleichförmigkeit wegen gewöhnlich des uneigentlichen Ausdrucks, die Tangente sey unendlich groß ($= \infty$) und sagt:

$$\text{tang } 0^\circ = \mp 0$$
$$\text{tang } 90^\circ = \pm \infty$$
$$\text{tang } 180^\circ = \mp 0$$
$$\text{tang } 270^\circ = \pm \infty \text{ *)}.$$

Diese Abwechselung läßt sich noch weiter ausdehnen.

Die Tangente eines negativen Bogens ist immer der Länge nach gleich der Tangente des entsprechenden positiven, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt.

Wird ein Halbmesser $= 1$ gesetzt; so gilt das in (9) gesagte; nur kann die Tangente durch jede Zahl ausgedrückt werden (ihr Zahlenwerth ist nicht, wie der der Sinus und Cosinus (8) in gewisse Gränzen eingeschlossen).

15. Zieht man Fig. 2. an dem Punkte *D*, der nach der Richtung der positiven Bögen um 90° von dem An-

*) Vergleiche die Anmerkung zu (8.).

fangspunkte der Bögen absteht, eine zweite Berührungslinie, und schneidet auch diese durch die Verlängerung des Halbmessers *CE*; so heißt das zwischen *D* und *S* enthaltene Stück derselben die Cotangente des Bogens *AE* oder des Winkels *ACE*.

16. Für einen Bogen

des zweiten Quadr. *AEH* ist die Cotang. *DU* negativ.
des dritten „ *AEHK* „ „ „ *SD* positiv.
des vierten „ *AEHKM* „ „ „ *DU* negativ.

Die Cotangente hat mit der Tangente immer einerlei Zeichen. Ferner ist

$$\text{cotang } 0^\circ = \mp \infty$$
$$\text{cotang } 90^\circ = \pm 0$$
$$\text{cotang } 180^\circ = \mp \infty$$
$$\text{cotang } 270^\circ = \pm 0$$

Die Cotangenten negativer Bögen sind immer der Größe nach gleich den Cotangenten der entsprechenden positiven, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt.

17. Auch die Tangenten und Cotangenten bekommen schon bei den Bögen des ersten Quadranten alle möglichen Längen (oder Zahlenwerthe). Man findet sie für Bögen in den folgenden Quadranten, auf folgende Art:

a) $\text{tang}\,(90^\circ + \alpha) = -\text{cotang}\,\alpha$;
$\text{cotang}\,(90^\circ + \alpha) = -\text{tang}\,\alpha$;

b) $\text{tang}\,(180^\circ + \alpha) = \text{tang}\,\alpha$;
$\text{cotang}\,(180^\circ + \alpha) = \text{cotang}\,\alpha$;

c) $\text{tang}\,(270^\circ + \alpha) = -\text{cotang}\,\alpha$
$\text{cotang}\,(270^\circ + \alpha) = -\text{tang}\,\alpha$.

18. Aus (a) folgt, wenn α negativ gesetzt wird:

$$\text{cotang}\,\alpha = \text{tang}\,(90^\circ - \alpha)$$
$$\text{tang}\,\alpha = \text{cotang}\,(90^\circ - \alpha)$$

d. h. die Cotangente eines Bogens ist immer gleich der Tangente seines Complements, und umgekehrt.

III. Sekanten und Cosekanten.

19. Die gerade Linie CR, deren Lage durch den Mittelpunkt C und des Bogens Endpunkt E, und deren Länge durch die Entfernung des Mittelpunkts C vom Endpunkt der Tangente R bestimmt wird, heißt die Sekante des Bogens AE oder des Winkels ACE.

20. Ist der Bogen im zweiten Quadranten z. B. AEH; so ist seine Sekante CT. Sekanten von Bögen des ersten und zweiten Quadranten sind also entgegengesetzte Größen, indem sie bei jenen mit den Halbmessern, die ihre Lage bestimmen, selbst; bei diesen mit ihren Verlängerungen nach der entgegengesetzten Seite zusammenfallen. Also für einen Bogen

des zweiten Quadr.	AEH	ist die Sekante	CT negativ,
des dritten „	$AEHK$	„ „	CR negativ,
des vierten „	$AEHKM$	„ „	CT positiv.

Die Sekante hat also mit dem Cosinus einerlei Zeichen.

Ferner ist $\sec 0^\circ = +1$

$$\sec 90^\circ = \pm \infty$$
$$\sec 180^\circ = -1$$
$$\sec 270^\circ = \mp \infty$$

Die Sekanten negativer Bögen stimmen in Länge und

Zeichen immer mit den Sekanten der entsprechenden positiven überein.

21. Die Linie CS, welche der Läge nach wieder durch den Halbmesser CE, der Länge nach durch den Mittelpunkt C und den Endpunkt der Cotangente bestimmt wird, heißt die Cosekante des Bogens AE oder des Winkels ACE.

22. Durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie (20) findet sich: für einen Bogen

im zweiten Quadr. AEH ist die Cosekante CU positiv.
im dritten „ $AEHK$ „ „ „ CS negativ.
im vierten „ $AEHKM$ „ „ CU negativ.

Die Cosekante hat also mit dem Sinus einerlei Zeichen.

Ferner ist
$$\text{cosec } 0^\circ = \mp \infty$$
$$\text{cosec } 90^\circ = + 1$$
$$\text{cosec } 180^\circ = \pm \infty$$
$$\text{cosec } 270^\circ = - 1$$

Die Cosekanten negativer Bögen haben mit den Cosekanten der entsprechenden positiven immer einerlei Länge aber entgegengesetzte Zeichen.

23. Sekanten und Cosekanten haben auch bei Bögen im ersten Quadranten alle möglichen Zahlenwerthe, man trägt diese in ähnlicher Weise wie vorher in (10) und (17) geschehen ist, auf die Bögen der folgenden Quadranten über:

a) $\sec(90^\circ + \alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$ b) $\sec(180^\circ + \alpha) = -\sec\alpha$
$\text{cosec}(90^\circ + \alpha) = \sec\alpha$ $\text{cosec}(180^\circ + \alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$

c) $\sec(270^\circ + \alpha) = \text{cosec}\,\alpha$
$\text{cosec}(270^\circ + \alpha) = -\sec\alpha$

24. Aus (a) folgt $\operatorname{cosec} \alpha = \sec (90 - \alpha)$
$\sec \alpha = \cos (90 - \alpha)$

IV. Quersinus und Quercosinus.

25. Außer den bisher abgehandelten trigonometrischen Linien werden noch zuweilen, obgleich viel seltener, der Quersinus (sinus versus) und der Quercosinus (cosinus versus) gebraucht.

Der Quersinus eines Bogens ist die Entfernung seines Endpunkts von der Tangente also Fig. 3.

$$\left.\begin{matrix} AF \\ \text{oder} \\ AI \end{matrix}\right\} \text{für die Bögen} \left\{\begin{matrix} AE \text{ und } AEHKM \\ \text{oder} \\ AEH \text{ und } AEHK \end{matrix}\right.$$

Der Quercosinus eines Bogens ist die Entfernung seines Endpunkts von der Cotangente, also Fig. 3.

$$\left.\begin{matrix} DG \\ \text{oder} \\ DL \end{matrix}\right\} \text{für die Bögen} \left\{\begin{matrix} AE \text{ und } AEH \\ \text{oder} \\ AEHK \text{ und } AEHKM \end{matrix}\right.$$

26. Durch ähnliche Betrachtungen wie in den vorigen Sätzen findet man:

$\sin \text{vers } 0° = 0$ $\cos \text{vers } 0° = +1$
$\sin \text{vers } 90° = +1$ $\cos \text{vers } 90° = 0$
$\sin \text{vers } 180° = +2$ $\cos \text{vers } 180° = +1$
$\sin \text{vers } 270° = +1$ $\cos \text{vers } 270° = +2$

Die Quersinus und Quercosinus sind also immer positiv.

Negative Bögen haben mit ihren entsprechenden positiven einerlei Quersinus: die Quercosinus negativer Bögen aber, ergänzen die der entsprechenden positiven zu 2.

27. Die Werthe der Quersinus und Quercosinus für Bögen des ersten Quadranten werden auf die Bögen der folgenden übertragen, wie folgt:

a) $\sin\text{vers}\,(90^\circ + \alpha) = 2 - \cos\text{vers}\,\alpha$
   $\cos\text{vers}\,(90^\circ + \alpha) = \sin\text{vers}\,\alpha$

b) $\sin\text{vers}\,(180^\circ + \alpha) = 2 - \sin\text{vers}\,\alpha$
   $\cos\text{vers}\,(180^\circ + \alpha) = 2 - \cos\text{vers}\,\alpha$

c) $\sin\text{vers}\,(270^\circ + \alpha) = \cos\text{vers}\,\alpha$
   $\cos\text{vers}\,(270^\circ + \alpha) = 2 - \sin\text{vers}\,\alpha.$

28. Aus (a) folgt:

$$\cos\text{vers}\,\alpha = \sin\text{vers}\,(90^\circ - \alpha)$$
$$\sin\text{vers}\,\alpha = \cos\text{vers}\,(90^\circ - \alpha)$$

Zweites Kapitel.

Beziehungen der trigonometrischen Hülfsgrößen unter einander.
(Trigonometrische Gleichungen.)

I. Gleichungen zwischen den verschiedenen Hülfsgrößen desselben Bogens.

29. Im vorigen Kapitel sind die trigonometrischen Hülfsgrößen für sich allein betrachtet. Jetzt sollen allgemeine Beziehungen zwischen den verschiedenen Hülfsgrößen, die demselben Bogen x angehören, aufgesucht werden. Der Halbmesser wird dabei wieder als Einheit angenommen; die Hülfsgrößen selbst erscheinen dadurch als Zahlen. Die Zeichen werden so geschrieben, wie sie den x im ersten Quadranten zukommen.

30. Zuerst ergiebt sich nach (5) zwischen Sinus und Cosinus die allgemeine Gleichung

n. 1. $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$

oder $\cos x = \pm \sqrt{(1 - \sin x^2)}$

$\sin x = \pm \sqrt{(1 - \cos x^2)}$

31. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke (Fig. 3.), in denen die Sinus, Cosinus und Tangenten desselben Bogens (x) immer vorkommen, folgt allgemein

n. 2. $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ oder $\sin x = \operatorname{tang} x . \cos x$

$\cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tang} x}$

32. $\operatorname{cotang} x$ ist nach (18) $= \operatorname{tang}(90^\circ - x)$, also nach (31) $= \frac{\sin(90^\circ - x)}{\cos(90^\circ - x)}$,

also ist nach (11) allgemein

n. 3. $\operatorname{cotang} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ oder $\cos x = \cot x \sin x$

$\sin x = \frac{\cos x}{\operatorname{cotang} x}$

Dasselbe findet man durch Vergleichung der Dreiecke, in denen diese Größen vorkommen.

33. Wollte man in (31) und (32) die Tangente und Cotangente durch den Sinus oder Cosinus allein ausdrücken; so brauchte man nur die Gleichung n. 1. zu substituiren. Daraus würde folgen:

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{(1 - \sin x^2)}} = \frac{\pm\sqrt{(1 - \cos x^2)}}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotang} x = \frac{\cos x}{\pm\sqrt{(1 - \cos x^2)}} = \frac{\pm\sqrt{(1 - \sin x^2)}}{\sin x}$$

34. Aus Multiplication von n. 2 und n. 3 ergiebt sich allgemein

n. 4. $\text{tang}\, x \,.\, \text{cotang}\, x = 1$ oder

$$\text{tang}\, x = \frac{1}{\text{cotang}\, x} \text{ und } \cot x = \frac{1}{\text{tang}\, x}$$

Dasselbe ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der rechtwinklichen Dreiecke, worin die Tangente und Cotangente geometrisch vorkommen.

35. Aus geometrischer Betrachtung findet sich ferner allgemein

n. 5. $$\sec.\, x = \frac{1}{\cos\, x} = \pm\sqrt{(1 + \text{tang}\, x^2)}$$

Eben so findet man entweder durch die Formeln in (11), (18) und (24) oder durch Vergleichung ähnlicher Dreiecke

n. 6. $$\text{cosec.}\, x = \frac{1}{\sin\, x} = \pm\sqrt{(1 + \text{cotang}\, x^2)}$$

36. Endlich findet man noch auf ähnliche Weise

n. 7. $\sin \text{vers}\; x = 1 - \cos x$

$\cos \text{vers}\; x = 1 - \sin x$

37. Diese Formeln sind ganz allgemein, welches auch die Größe des Winkels oder Bogens x sey. Bei ihrer Anwendung hat man also nur auf gehörige Anbringung der Zeichen + und —, so wie überhaupt auf das im ersten Kapitel vorgetragene zu achten. Wäre z. B. x ein Bogen des vierten Quadranten $= (270^\circ + y)$; so wäre nach n. 2. $\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\cos y}{\sin y}$; also negativ und an Größe $= \text{cotang}\, y$, wie es nach (13) und (17) auch seyn muß.

38. Es erhellt aus dem bisher vorgetragenen, daß man für einen Bogen nur eine von den trigonometrischen Hülfsgrößen zu kennen braucht, um alle anderen daraus durch Rechnung finden zu können.

II. Gleichungen zwischen den Hülfsgrößen einfacher und zusammengesetzter Bögen.

39. Wenn die Sinus und Cosinus zweier Bögen oder Winkel x und y bekannt sind; so lassen sich daraus die Sinus und Cosinus ihrer Summe $(x+y)$ oder Differenz $(x-y)$ finden.

Es sey zuerst Fig. 4. Winkel $ACE = x$, $ECB = y$, $BG = \sin y$, $GC = \cos y$, $BD = \sin(x+y)$, $DC = \cos(x+y)$. Der Halbmesser des Kreises, durch dessen Bögen die Winkel gemessen werden, sey wieder $= 1$. Endlich werden von G, die Linie GH und GI perpendikular auf BD und AC gefällt.

Dadurch wird $BD = HD + BH = GI + BH$. Also da der Winkel $DBG = x$.

n. 8. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Eben so ist $DC = IC - ID = IC - GH$; also

n. 9. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Diese Formeln sind freilich zunächst nur für den Fall abgeleitet, wo x, y und selbst $(x+y)$ im ersten Quadranten sind; man kann sie durch andere Constructionen und mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen der darin vorkommenden Größen auch weiter ausdehnen. So würde z. B. Fig. 5. $GH > IC$, also die Differenz $\cos x \cos y - \sin x \sin y$ negativ, und wirklich ist auch CD ein negativer Cosinus.

40. Die vollkommene Allgemeinheit der Formeln n. 8. u. n. 9. erkennt man durch folgenden Lehrsatz: Wenn sie für zwei Winkel x und y gelten; so gelten sie auch für $(x + 90^\circ)$ und y.

Beweis: Nach (10) ist $\sin(90^\circ + x + y) = \cos(x + y)$
$\cos(90^\circ + x + y) = -\sin(x + y)$
und also nach der Voraussetzung

$$\sin(90^\circ + x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(90^\circ + x + y) = -\sin x \cos y - \cos x \cos y$$

aber gleichfalls nach (10) ist
$\cos x = \sin(90^\circ + x)$
$\sin x = -\cos(90^\circ + x)$. Dieses substituirt, folgt:

$$\sin[(90^\circ + x) + y] = \sin(90^\circ + x)\cos y + \cos(90^\circ + x).\sin y$$
$$\cos[(90^\circ + x) + y] = \cos(90^\circ + x)\cos y - \sin(90^\circ + x)\sin y$$

welches wieder dieselben Formeln sind. Durch das nämliche Verfahren kann man nun von $(90^\circ + x)$ und y auf $(180^\circ + x)$ und y, oder auf $(90^\circ + x)$ und $(90^\circ + y)$ und von diesen immer weiter schließen, woraus die Allgemeinheit der Formeln erhellt, so bald die Formeln in (10) als allgemein bewiesen vorausgesetzt werden.

41. Setzt man in n. 8. und n. 9. y negativ; so erhält man unter Voraussetzung von (6)

n. 10. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x . \sin y$

n. 11. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

Dasselbe findet man leicht aus n. 8. u. n. 9., wenn man setzt:

$$\sin x = \sin[(x-y)+y] = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y$$
$$\cos x = \cos[(x-y)+y] = \cos(x-y)\cos y - \sin(x-y)\sin y$$

und $\sin(x - y)$ oder $\cos(x - y)$ eliminirt.

Die Fig. 6., worin $ACE = x$, $ACB = y$, also $BCE = (x - y)$ ist, giebt Anleitung zum geometrischen Beweise dieser Formeln.

42. Aus n. 8, n. 9, und n. 2. findet man allgemein

$$\text{tang}\,(x + y) = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}, \text{ oder}$$

wenn man Zähler und Nenner durch $\cos x \cos y$ dividirt

$$\text{n. 12.}\quad \text{tang}\,(x + y) = \frac{\text{tang}\,x + \text{tang}\,y}{1 - \text{tang}\,x\,.\,\text{tang}\,y}$$

Eben so ergiebt sich aus n. 10 und n. 11.

$$\text{n. 13.}\quad \text{tang}\,(x - y) = \frac{\text{tang}\,x - \text{tang}\,y}{1 + \text{tang}\,x\;\text{tang}\,y}$$

Der geometrische Beweis für n. 12. ergiebt sich nach Fig. 7. auf folgende Art: Es sey $ACE = x$, $ECB = y$ und auf EC in E, so wie auf AC in A Perpendikel errichtet; so ist $KF = \text{tang}\,x + \text{tang}\,y$ und $AL = \text{tang}\,(x + y)$: fällt man nun von F das Perpendikel FD auf AC; so ist der Winkel $EFG = x$, also

$EG = \text{tang}\,x\,.\,\text{tang}\,y$, also $GC = 1 - \text{tang}\,x\,.\,\text{tang}\,y$

Nun ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke LAC und FDC $\frac{AL}{AC} = \frac{FD}{DC}$: aber auch wegen Aehnlichkeit der Dreiecke KDF und GDC, $\frac{FD}{DC} = \frac{KF}{GC}$, also $\frac{AL}{AC} = \frac{KF}{GC}$, welche Gleichung in die obigen trigonometrischen Ausdrücke übersetzt, mit n. 12. gleichbedeutend ist.

Eben so leicht beweist man n. 13 geometrisch, wenn man in Fig. 8. den Bogen $AE = x$, $AB = y$ setzt, von L ein Perpendikel LO auf die Verlängerung des Halbmessers BC fällt, dieses bis P verlängert, und

sodann die Dreiecke BRC und OLC; so wie OLK und OPC vergleicht.

43. Aus n. 12 und n. 13 ergiebt sich durch Anwendung von n. 4.

$$\text{cotang}\,(x+y) = \frac{1 - \text{tang}\,x\ \text{tang}\,y}{\text{tang}\,x + \text{tang}\,y}, \text{ oder}$$

durch Division mit tang x tang y im Zähler und Nenner

$$\text{n. 14.}\quad \text{cotang}\,(x+y) = \frac{\text{cotang}\,x\cdot\text{cotang}\,y - 1}{\text{cotang}\,y + \text{cotang}\,x}$$

$$\text{und n. 15.}\quad \text{cotang}\,(x-y) = \frac{\text{cotang}\,x\ \text{cotang}\,y + 1}{\text{cotang}\,y - \text{cotang}\,x}.$$

Dasselbe findet man durch die Formeln n. 8, n. 9, n. 10, n. 11 und gehörige Reduction.

Der geometrische Beweis für n. 14. ergiebt sich, wenn man Fig. 9. $AE = x$, $EB = y$, also $AB = (x+y)$ macht, CS perpendikular auf EC und in S die Berührungslinie PR zieht. Hierdurch wird $PR =$ cotang y + cotang x. Fällt man nun PD senkrecht auf AC; so wird der Winkel $SPD = 90° - x$; also $CQ =$ cotang x cotang $y - 1$. Endlich ist $\frac{CD}{PD} =$ cotg$(x+y)$: aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CDQ und PDR folgt aber $\frac{CD}{PD} = \frac{CQ}{PR}$ d. i. n. 14.

Zum geometrischen Beweis von n. 15 dient Fig. 8. wenn man auf AC das Perpendikel CQ errichtet, $QB = x$, $QE = y$ setzt: dadurch wird $BE = (x-y)$, $LK =$ cotang y — cotang x, $PA =$ cotang y cotang x, (weil $PLA = KCA = 90° - x$), also $PC =$

cotang x cotang $y + 1$, und $\frac{BC}{RB} = $ cotang $(x - y)$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt aber, wie vorher,

$$\frac{BC}{RB} = \frac{PC}{KL} \text{ oder n. 15.}$$

44. Die Formeln n. 8, n. 10, n. 12, und n. 14. können nun zuerst sehr vortheilhaft benutzt werden, um die trigonometrischen Hülfsgrößen für einen Bogen oder Winkel aus denen seiner Hälfte herzuleiten. Denn setzt man $x = y = \frac{1}{2}v$; so wird $(x + y) = v$ und es ergiebt sich:

n. 16. $\sin v = 2 \sin \frac{1}{2}v \cos \frac{1}{2}v$

n. 17. $\cos v = \cos \frac{1}{2}v^2 - \sin \frac{1}{2}v^2$

n. 18. $\text{tang } v = \frac{2 \text{ tang } \frac{1}{2}v}{1 - \text{tang } \frac{1}{2}v^2}$

n. 19. $\text{cotang } v = \frac{\text{cotang } \frac{1}{2}v^2 - 1}{2 \text{ cotang } \frac{1}{2}v}$

Die geometrischen Beweise dieser abgeleiteten Formeln, ergeben sich durch dieselben Constructionen, durch welche die der ursprünglichen geführt wurden. Man braucht nur in Fig. 4, 7 und 9 die Bögen $AE = EB = \frac{1}{2}v$ zu machen, wodurch also $AB = v$ wird.

45. Aus n. 17. erhält man mit Anwendung von n. 1.

n. 20. $2 \sin \frac{1}{2}v^2 = 1 - \cos v$ oder

$$\sin \frac{1}{2}v = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos v}{2}\right)}$$

und eben so

n. 21. $2 \cos \frac{1}{2}v^2 = 1 + \cos v$ oder

$$\cos \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos u}{2}\right)}.$$

Macht man Fig 10. $ACB = v$, $ACE = \frac{1}{2} v$, zieht CE, AB und BH, und fällt BD senkrecht auf AC; so wird $BG = AG = \sin \frac{1}{2} v$, $CG = \cos \frac{1}{2} v$, $AB = 2 \sin \frac{1}{2} v$, $BH = 2 \cos \frac{1}{2} v$, $AD = 1 - \cos v$ $DH = 1 + \cos v$. Aber auch $ABD = BHC = \frac{1}{2} v$,

also $AD = AB \sin \frac{1}{2} v = 2 \sin \frac{1}{2} v^2$, d. i. n. 20.

$DH = BH \cos \frac{1}{2} v = 2 \cos \frac{1}{2} v^2$, d. i. n. 21.

46. Durch Division findet man aus n. 20. und 21.

n. 22. $\tang \frac{1}{2} v^2 = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}$ oder

$$\tang \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}\right)}$$

n. 23. $\cotang \frac{1}{2} v^2 = \frac{1 + \cos v}{1 - \cos v}$ oder

$$\cotang \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos v}{1 - \cos v}\right)}$$

Für den geometrischen Beweis von n. 22. construire man Fig. 10. die Tangente von $\frac{1}{2} v$ (AL): so ist $\tang \frac{1}{2} v^2 = \frac{AL^2}{AC^2} = \frac{AD^2}{DB^2} = \frac{AD}{DH}$ (weil DB die mittlere Proportionallinie zwischen AD und DH.)

Construirt man Fig. 10. die Cotangente von $\frac{1}{2} v$ (RO); so hat man eben so

$$\cotang \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{RO^2}{OC^2} = \frac{DH^2}{DB^2} = \frac{DH}{AD} \text{ (n. 23.)}$$

47. Betrachtet man in n. 8. und n. 10. die Summen und Differenzen der Bögen, $(x+y)$ und $(x-y)$, als Bögen für sich, und setzt $(x+y)=a$; $(x-y)=b$; so wird $x=\frac{1}{2}(a+b)$ und $y=\frac{1}{2}(a-b)$. Nach dieser Veränderung findet man durch Addition und Subtraction der beiden Formeln, zwei andere, in welchen die Summen und Differenzen der Sinus, in Producten aus den Sinus und Cosinus der halben Summen und Differenzen der Bögen ausgedrückt sind. Denn es ist

n. 24. $\sin a+\sin b=2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$

n. 25. $\sin a-\sin b=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$

Auch diese Formeln lassen sich geometrisch nachweisen: Wenn man Fig. 11, $AG=AE=a$, $AB=b$ macht, GE zieht, BD und BH perpendikular fällt; so ist

$HE=\sin a+\sin b$ und $HG=\sin a-\sin b$.

Verlängert man nun BC bis K und zieht KE, EB, BG, GK; so ist Winkel $BKE=BGH=\frac{1}{2}(a+b)$ und Winkel $BKG=BEG=\frac{1}{2}(a-b)$. Durch Benutzung der rechtwinklichen Dreiecke KEB und BHE findet man sodann n. 24; so wie durch Benutzung der beiden andern, BGK und BGH n. 25.

48. Auf ganz ähnliche Art findet man aus Verbindung von n. 9 und n. 11.

n. 26. $\cos a+\cos b=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$

n. 27. $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$

oder $\cos b-\cos a=2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$.

Zum geometrischen Beweise dieser Formeln dient wie-

der Fig. 11, denn es ist $\cos b - \cos a = DF = BH$, und wenn man von dem Punkt K, zwei Perpendikel auf AM und GE fällt; so ist $KL = FO = \cos a + \cos b$ und der Winkel $GKL = BGH = \frac{1}{2}(a+b)$.

49. Aus diesen vier letzten Formeln findet man endlich durch Division noch folgende sechs:

n. 28. $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \text{tang}\ \frac{1}{2}(a+b)$ (aus n. 24 u. n. 26.)

n. 29. $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \text{tang}\ \frac{1}{2}(a-b)$ (aus n. 25 u. n. 26.)

n. 30. $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -\ \text{cotang}\ \frac{1}{2}(a-b)$ (aus n. 24 u. n. 27.)

n. 31. $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = -\ \text{cotang}\ \frac{1}{2}(a+b)$ (aus n. 25 u. n. 27.)

n. 32. $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \text{tang}\ \frac{1}{2}(a+b)\ \text{cotang}\ \frac{1}{2}(a-b)$ (aus n. 24 u. n. 25.)

n. 33. $\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = -\ \text{cotg}\ \frac{1}{2}(a+b)\ \text{cotg}\ \frac{1}{2}(a-b)$ (aus n. 26. u. n. 27.)

Die geometrischen Beweise dieser Formeln ergeben sich wieder aus Fig. 11. So ist z. B. für n. 28.

$\frac{GL}{LK} = \text{tang}\ GKL$; für n. 32. ist

$BH = GH\ .\ \text{tang}\ BGH = HE\ .\ \text{tang}\ BEH.$

50. Die Formeln n. 10 bis n. 33. sind alle aus den Formeln n. 1 bis n. 9. durch bloße Substitution abgeleitet, gelten also, wie diese für alle Winkel, wel-

ches auch ihre Größe sey. Die Zeichen sind aber in ihnen allen so gebraucht, wie sie den Winkeln des ersten Quadranten zukommen; in der Anwendung wird man also nur mit diesen Zeichen nach den jedesmaligen besondern Umständen Abänderungen vorzunehmen haben. — Die beigefügten geometrischen Constructionen Fig. 6 - 11 gelten immer nur für Winkel des ersten Quadranten, und können auch nur für diesen ersten Fall, als zum Beweise dienend, betrachtet werden.

Drittes Kapitel.

Construction und Gebrauch der trigonometrischen Tafeln.

---

51. Sollen die, bis jetzt ihren allgemeinen Eigenschaften nach abgehandelten, trigonometrischen Hülfsgrößen, Schlüsse von Winkeln auf gerade Linien und umgekehrt möglich machen; so entsteht das Bedürfniß, ihre Zahlenwerthe (den Halbmesser immer = 1 gesetzt) für jeden Bogen oder Winkel zu kennen. Diesem Bedürfniß wird durch die trigonometrischen Tafeln abgeholfen, deren Anfertigung und Gebrauch jetzt erklärt werden soll.

52. Es ergiebt sich aus den Formeln n. 1. bis n. 7. daß es zunächst nur Bedürfniß ist eine Tafel für die Sinus zu verfertigen, weil sich aus diesen die andern trigonometrischen Hülfsgrößen leicht berechnen lassen.

Ferner braucht man nur die Sinus für Winkel des ersten Quadranten wirklich zu berechnen, weil ihre Zahlenwerthe in den andern Quadranten immer wiederkehren. Endlich ist ersichtlich, daß wenn die Sinus der Bögen bis 45° berechnet sind, dadurch nach n. 1. die Cosinus derselben Bögen gefunden werden können, und daß diese von 0°—45° so berechneten Cosinus wieder unmittelbar als die Sinus der Winkel zwischen 90° und 45° gebraucht werden können (11). Die Berechnung der Sinus bis 45° löst also, mit Anwendung des in den vorigen Kapiteln Vorgetragenen, die Aufgabe der Construction einer trigonometrischen Tafel.

53. Zur Berechnung der Sinus bis zu 45° kann man sich zuerst der regelmäßigen Vielecke bedienen, deren Construction in den Elementargeometrie vorkommt. — Die Seite des regelmäßigen Sechsecks $= 1 =$ Sehne von $60° = 2 \sin 30°$, also $\sin 30° = \frac{1}{2}$. Also

$$\cos 30° = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60°. —$$

Die Seite des Quadrats ist $= \sqrt{2}$,

$$\text{also } \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°. —$$

Die Seite des regelmäßigen Zehnecks $= 2 \sin 18°$, wenn man sie $= x$ setzt; so folgt aus der Construction

$$1 : x = x : 1 - x \text{ oder } x^2 + x = 1$$

$$\text{also } x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\ {*})\ \text{d. h. } \sin 18° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

*) Die quadratische Gleichung: $x^2 + x = 1$ giebt eigentlich für x zwei Werthe $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und $-\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Dieser letztere Werth kann aber nicht gebraucht werden, weil es keine absolut negative Linie geben kann.

also $\cos 18° = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(5+\sqrt{5})} = \sin 72°$. —

Hieraus ergiebt sich zuvörderst schon folgendes Täfelchen, in welchem nur noch die Quadratwurzeln auszuziehen bleiben:

Bogen	Sinus	Cosinus
0°	. . 0 . . .	. . 1
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ . .	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})}$
30°	. . $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
72°	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(5+\sqrt{5})}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
90°	. . . 1 . . .	. . 0

54. Aus diesen so gefundenen Werthen kann man nun vermittelst der Formeln n. 8. u. s. w. andere finden. — Sollte z. B. $\sin 15°$ gesucht werden; so wäre $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$ also (nach n. 10.)

$$= \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1);$$

oder $\sin 15° = \sin \frac{1}{2}(30°)$, also (nach n. 20.) =

$$\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(4-2\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$$ wie vorher. —

55. Auf diesem Wege findet man also zunächst die Sinus und Cosinus der Winkel von 3° zu 3° und kann sie sodann durch Halbirungen für jeden Bogen finden, der durch fortgesetztes Halbiren von 3° gefunden werden kann; und zwar auf so viele Dezimalstellen als man will. — Sollen nun aber die Bögen, für welche die Tafel die Sinus und Cosinus angiebt, von 1′ zu 1′ oder von 20″ zu 20″, kurz immer um einen Theil der gewöhnlichen Kreiseintheilung fortschreiten; so reicht das bisherige Verfahren allein noch nicht aus; denn durch fortgesetztes Halbiren von 3° kommt man auf keinen aliquoten Theil eines Grades. Man kann aber dadurch doch auf sehr kleine Bögen kommen, bei denen die Sinus mit den Tangenten und also auch mit den Bögen, in so vielen Dezimalstellen übereinstimmen, als man in der Rechnung gebraucht. Ist dieses der Fall; so kann man innerhalb dieser Gränzen, die Sinus den Bögen proportional setzen, und so von einem sehr kleinen, durch fortgesetzte Halbirung von 3° gefundenen Bogen, auf den ihm zunächst liegenden, aliquoten Theil eines Grades, der in der Tafel vorkommen soll, schließen. Weiß man z. B. daß bei Bögen die kleiner sind als 1′ die Sinus und Tangenten immer bis auf zehn Dezimalstellen übereinstimmen; so könnte man aus dem Sinus und Cosinus des Bogens 42″, 1875 den man durch achtmalige Halbirung von 3° findet, den Sinus und Cosinus von 40″ durch eine einfache Proportionsrechnung, und daraus wieder durch Halbirung den Sinus und Cosinus von 20″ auf zehn Dezimalstellen finden. Hat man für einen solchen Bo-

gen die trigonometrischen Hülfsgrößen gefunden; so ist dadurch vermittelst der Formeln n. 8 u. s. w. die Berechnung derselben durch den ganzen Quadranten für Bögen die immer um einen solchen Theil fortschreiten, möglich gemacht.

56. Das in den vorigen Sätzen Vorgetragene mag hinreichen, die Möglichkeit der Construction einer trigonometrischen Tafel gezeigt zu haben: und wirklich sind die ersten trigonometrischen Tafeln auf diesem unsägliche Mühe erforderndem Wege berechnet worden. Doch hat die weitere Ausbildung der mathematischen Wissenschaften jetzt Mittel gelehrt, auf einem viel leichteren Wege zu demselben Resultat zu gelangen. Von diesen Mitteln kann hier noch nicht vollständige Rechenschaft gegeben werden; doch mag das folgende dienen, einen vorläufigen Begriff davon zu geben, und zu weiterm Eindringen zu ermuntern. Setzt man die Zahl, welche den halben Umfang des Kreises für den Halbmesser 1 darstellt, als bekannt voraus ($\pi = 3{,}1415926\ldots$); so kann dadurch jeder Bogen x als Zahl ausgedrückt werden: denkt man sich nun die Sinus und Cosinus durch fortlaufende convergirende Reihen dargestellt, deren Glieder nach den Potenzen von x fortschreiten, jede in einen Zahlencoefficienten multiplicirt; so bleibt nur die Bestimmung dieser letztern übrig, und dazu kann man gelangen, indem man die oben abgehandelten Eigenschaften der Sinus und Cosinus voraussetzt.

Sey also $\sin x = C + C^{I} x + C^{II} x^2 + C^{III} x^3 + C^{IV} x^4 \ldots$

$\cos x = K + K^{I} x + K^{II} x^2 + K^{III} x^3 + K^{IV} x^4 \ldots$

so sieht man zuerst daß $C = o$ und $K = 1$ seyn muß, weil die Reihen wenn $x = o$ gesetzt wird, diese Werthe für $\sin x$ und $\cos x$ geben müssen. Ferner sieht man daß C^{II}, C^{IV}, C^{VI} u. s. w. so wie auch K^{I}, K^{III}, K^{V} u. s. w. $= o$ seyn müssen, weil sonst nicht für $+x$ und $-x$, nur dem Zeichen nach verschiedene Sinus, und ganz übereinstimmeude Cosinus gefunden würden (6). Endlich sieht man, daß in der ersten Reihe $C^{I} = 1$ seyn muß; denn wenn man mit x auf beiden Seiten dividirt; so erhält man $\frac{\sin x}{x} = C^{I} + C^{III} x^2 + C^{V} x^4 \ldots$: die Gränze der sich $\frac{\sin x}{x}$ nähert, wenn x immer abnimmt, ist 1, die Gränze der Reihe ist C^{I}, und diese Gränzen müssen übereinstimmen. Durch diese Betrachtungen reduciren sich also die obigen Ausdrücke auf folgende:

A. $\sin x = x + a x^3 + b x^5 + c x^7 + d x^9 + \text{etc.}$

B. $\cos x = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \text{etc.}$

wo nur noch die Zahlenwerthe der Coefficienten zu finden sind. Dazu kann man sich der in n. 1. und n. 21. gelehrten Eigenschaften der Sinus und Cosinus bedienen. Macht man zuerst die Quadrate dieser Reihen, und ordnet sie nach den Potenzen von x; so erhält man:

$$\text{C. } \sin x^2 = x^2 + 2ax^4 + a^2x^6 + 2bx^6 + 2abx^8 + b^2x^{10} + 2cx^8 + 2acx^{10} + \text{etc.} + 2dx^{10} + \text{etc.}$$

D. $\cos x^2 = 1 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^4$
$+ 2\beta x^4 + 2\alpha\beta x^6 + \beta^2 x^8$
$+ 2\gamma x^6 + 2\alpha\gamma x^8 + 2\beta\gamma x^{10} + \text{etc.}$
$+ 2\delta x^8 + 2\alpha\delta x^{10} + \text{etc.}$
$+ 2\varepsilon x^{10} + \text{etc.}$

Addirt man diese beiden Reihen zusammen, so muß ihre Summe immer $= 1$ seyn (n. 1.), also die Summe der Coefficienten von jeder einzelnen Potenz von $x = 0$. Daraus hat man zuerst die Gleichungen:

1. $2\alpha + 1 = 0$.
2. $2a + \alpha^2 + 2\beta = 0$
3. $a^2 + 2b + 2\alpha\beta + 2\gamma = 0$
4. $2ab + 2c + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\delta = 0$ u. s. w.

Weil aber nach (n. 21.) $2\cos x^2 = 1 + \cos 2x$; so erhält man, wenn die Reihe in (D) doppelt genommen, in (B) aber für x, $2x$ gesetzt, und 1 addirt wird, zwei Reihen, in denen die Coefficienten von x^2, x^4 u. s. w. gleich seyn müssen. Daraus ergeben sich die neuen Gleichungen:

I. $2\alpha^2 + 4\beta = 16\beta$
II. $4\alpha\beta + 4\gamma = 64\gamma$
III. $2\beta^2 + 4\alpha\gamma + 4\delta = 256\delta$ u. s. w.

Alsdann folgt aus 1. $\alpha = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{1.2}$; dieses in I substituirt giebt $\beta = +\frac{1}{24} = +\frac{1}{1.2.3.4}$; sodann folgt aus II. $\gamma = -\frac{1}{720} = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ u. s. w. Mit diesen Werthen von $\alpha, \beta, \ldots$ folgen aus 2. 3. 4. u. s. w. die Werthe von $a, b, c \ldots$; $a = -\frac{1}{1.2.3}$;

$b = + \frac{1}{1.2.3.4.5}$; $c = - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$;

u. s. w. diese Werthe in die Reihen (A) und (B) substituirt folgt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

durch Division dieser Reihen ergiebt sich:

$$\text{tang}\, x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7.3} + \text{etc.}$$

$$\text{cotang}\, x = \frac{1}{x} - \frac{x}{1.3} - \frac{x^3}{1.3.5.3} - \frac{2x^5}{1.3.5.7.9} - \text{etc.}$$

Sind diese Reihen einmal berechnet; so kann man die trigonometrischen Hülfsgrößen für Bögen unter 45° auf eine beliebige Anzahl Dezimalstellen viel schneller finden als vorher; indem man nur so viele Glieder anzuwenden braucht, als auf die letzte Dezimalstelle noch Einfluß haben können.

57. Sind nun die trigonometrischen Tafeln von 1′ zu 1′ oder von 20″ zu 20″ berechnet; so findet man die den zwischenliegenden Bögen entsprechenden trigonometrischen Hülfsgrößen durch einfache Proportionsrechnung; wobei freilich die nur näherungsweise wahre Voraussetzung zum Grunde liegt: daß sich ein kleiner Zuwachs des Sinus, Cosinus u. s. w. wie der entsprechende Zuwachs des Bogens verhalte. Es ist deutlich, daß man sich, unter dieser Voraussetzung, derselben

Proportionsrechnung bedienen kann, um zu einer gegebenen trigonometrischen Hülfsgröße ihren entsprechenden Bogen zu finden, wenn derselbe zwischen zwei in den Tafeln angegebene fällt. Gewöhnlich sind in den Tafeln auch die Differenzen je zweier auf einander folgender Sinus, Cosinus u. s. w. oder aliquote Theile von ihnen angegeben, um dieses Einschalten zu erleichtern.

Ist x ein Bogen der in den Tafeln vorkommt z. B. $30°4'$ und $x+w$ kleiner als $30°5'$, so daß w kleiner als $1'$; und kann man sich erlauben $\sin w = w$ und $\cos w = 1$ zu setzen, so wird dadurch vermittelst der Formeln des vorigen Kapitels:

$$\sin(x+w) - \sin x = w \cos x$$

$$\cos(x+w) - \cos x = - w \sin x$$

$$\operatorname{tang}(x+w) - \operatorname{tang} x = \frac{w}{\cos x^2}$$

$$\operatorname{cotang}(x+w) - \operatorname{cotang} x = - \frac{w}{\sin x^2}$$

d. h. der Zuwachs der trigonometrischen Hülfsgrößen wird dem Zuwachs des Bogens in der Gränze von $1'$ proportional gesetzt. Man übersieht übrigens leicht, daß diese Voraussetzung sich der Wahrheit desto mehr nähert, je geringer die Größe, um welche die Bögen in der Tafel fortschreiten, und die Anzahl der Dezimalstellen ist, auf die man Rücksicht nimmt.

58. Weil die trigonometrischen Hülfsgrößen sehr häufig als Factoren vorkommen, indem sie schon für jeden bestimmten Halbmesser immer mit der ihm ent-

sprechenden Zahl multiplicirt werden müssen); so ist es für die Anwendung sehr bequem, statt ihrer wirklichen Zahlen, ihre Logarithmen gleich in den Tafeln anzusetzen. Solche logarithmisch-trigonometrische Tafeln (Tafeln der künstlichen trigonometrischen Linien) sind es, die man gewöhnlich unter dem Namen trigonometrischer Tafeln begreift: die vorher abgehandelten, in denen die wirklichen Zahlen vorkommen, pflegt man im Gegensatz Tafeln der natürlichen trigonometrischen Linien zu nennen. Die ersteren (welche in der Folge immer kurz trigonometrische Tafeln genannt werden sollen) haben ganz dieselbe Einrichtung, wie die vorher erwähnten. Es sind in ihnen gewöhnlich die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten von 0° — 90° angegeben. Um indeß bei diesen vier Größen nicht jede Zahl doppelt schreiben zu müssen, sind sie gewöhnlich alle vier nur von 0° — 45° hingeschrieben, und von 45° — 90° findet man dieselben Größen rückwärts unter neuen Ueberschriften; so daß z. B.

die Logarithmen

α,	β,	γ,	δ

den Ueberschriften

$\sin a$	$\cos a$	$\tan g\, a$	$\mathrm{cotang}\, a$
$\cos(90° - a)$	$\sin(90° - a)$	$\mathrm{cotg}(90° - a)$	$\mathrm{tang}(90° - a)$

angehören.

Diesen Logarithmen sind außerdem noch in drei besondern Spalten gewöhnlich die Differenzen der log. sin, log. cos, und log. tang und cotang beigefügt. —

Die beiden letzteren haben immer dieselben Differenzen: denn wenn *a* und *b* zwei auf einander folgende Bögen sind; so ist

$$\log \text{tang}\, a - \log \text{tang}\, b = \log \frac{1}{\text{cotg}\, a} - \log \frac{1}{\text{cotg}\, b} =$$

$$\log \text{cotang}\, b - \log \text{cotang}\, a.$$

Endlich sind noch, um die negativen Logarithmen zu vermeiden, entweder zu allen Kennziffern, oder doch zu denen aller Sinus und Cosinus, so wie der Tangenten unter 45° und der Cotangenten über 45° zehn Einheiten hinzu addirt.

59. Der Gebrauch solcher trigonometrischen Tafeln ist an sich durchaus keiner Schwierigkeit unterworfen, auch ist ihnen gewöhnlich noch eine besondere Anweisung dazu beigegeben. Die Schnelligkeit und Sicherheit ihres Gebrauchs läßt sich aber nur durch viele und sorgfältige Uebung erlangen. Es soll daher nur noch auf einige Vorsichten aufmerksam gemacht werden, deren Anwendung diese Schnelligkeit und Sicherheit befördern kann.

60. Zum Einschalten bedient man sich wieder der einfachen Proportionsrechnung, indem man voraussetzt, daß sich kleine Aenderungen in den Logarithmen der trigonometrischen Hülfsgrößen wie die Aenderungen der entsprechenden Bögen verhalten. Daß diese Voraussetzung näherungsweise, aber auch nur näherungsweise richtig ist, zeigt ein Blick in die trigonometrischen Tafeln selbst. Diese einfache Proportionsrechnung wird erleichtert, wenn man sich zur Regel macht,

beim Einschalten immer von dem nächsten auszugehen. So würde man also z. B. in Tafeln, wo die Bögen von 1' zu 1' angegeben sind, um den log sin 6° 2' 56'' zu finden, nicht von log sin 6° 2' ausgehen, und dazu den durch einfache Proportionsrechnung gefundenen Zuwachs des Logarithmus für 56'' hinzufügen; sondern vielmehr den log sin 6° 3' aus der Tafel entlehnen, und davon die Abnahme für 4'' subtrahiren.

61. Die Sinus und Cosinus ändern sich in Beziehung auf gleiche Aenderungen der Bögen am meisten, wo sie die kleinsten (dem 0 nahe) sind; ihre Aenderung wird dagegen sehr geringe, wenn sie sich ihrem größten Werthe (±1) nähern. Je schneller sich aber eine von diesen Größen ändert, desto weniger kann man sich in Auffindung des ihr zugehörigen Bogens irren; daher die Regel: Wenn ein Bogen durch seinen Sinus oder Cosinus bestimmt werden soll, so wähle man immer diejenige von beiden Größen, die die kleinste ist, oder die Tangente; denn die Bestimmung eines Bogens durch seine Tangente oder Cotangente ist immer genau, weil die Aenderung der Tangente größer ist als die des Bogens. (57.)

Soll ein Bogen z. B. Fig. 3. *AD* durch die Länge seines Sinus *FE* oder Cosinus *EG* bestimmt werden; so heißt das geometrisch so viel, als es sollen auf den diesen Linien parallelen Halbmessern, ihnen gleiche Abschnitte *CG* oder *CF* gemacht, und in deren Endpunkten *G* oder *F* Per-

pendikel GE oder FE errichtet werden, deren Durchschnitte mit der Kreisperipherie den Endpunkt des Bogens bestimmen. Diese Durchschnitte werden nun desto schärfer sich zeichnen lassen, je mehr der Winkel, welchen der Perpendikel mit der in E zu construirenden Berührungslinie macht, sich einem Rechten nähert, und das ist bei dem Perpendikel GE (der Bestimmung durch den Sinus) in der Gegend von A oder B (bei kleinen Sinus), bei dem Perpendikel FE (der Bestimmung durch den Cosinus) in der Gegend von D und N (bei kleinen Cosinus) der Fall. — Soll der Bogen AE durch die Länge der Tangente AR bestimmt werden; so hat man von ihrem Endpunkt R die Linie RC nach C zu ziehen, die immer auf der in E zu errichtenden Berührungslinie senkrecht steht, und also immer einen scharfen Durchschnitt giebt.

62. Die Aufsuchung der trigonometrischen Logarithmen für Bögen, die größer sind als 90°, hat nach dem in (10) und (17) Vorgetragenen keine Schwierigkeit. Man zieht von ihnen in Gedanken so oft 90° ab als möglich, und schlägt den Logarithmus für den Ueberschuß, — wenn 180° abgezogen ist, unter der verlangten Benennung, — wenn 90° oder 270° abgezogen ist, unter der verwandten Benennung — auf; z. B. für

$\log\sin(117^\circ 16' 14'')$ schlägt man auf $\log\cos(27^\circ 16' 14'')$
$\log\cos(214^\circ 36' 4'')$ „ „ „ $\log\cos(34^\circ 36' 4'')$
$\log\tan g(335^\circ 7' 46'')$ „ „ „ $\log\cot g(65^\circ 7' 46'')$

63. Bei der logarithmischen Rechnung nimmt man nur auf die absolute Größe (ohne Beachtung des Zeichens) der trigonometrischen Hülfsgrößen Rücksicht. Dabei ist es aber, um die Uebersicht zu erleichtern, bequem, neben die aufgeschlagenen Logarithmen oder deren Complemente, wenn sie einer negativen Größe angehören, irgend ein Zeichen, z. B. ein n zu schreiben. Ist nun den zu summirenden Logarithmen eine gerade Anzahl von n beigefügt; so entspricht ihre Summe immer einer positiven Zahl, oder umgekehrt.

Wäre z. B.

$$x = \frac{\text{tang}\,(117^\circ 14') \cdot \cos\,(324^\circ 16') \cdot \sin\,(140^\circ 45')}{\cos\,(195^\circ 30') \cdot \sin\,(22^\circ 13') \cdot \sin\,(200^\circ 50')}$$

so wäre

log tang (117° 14′)	=	10,2884746 n
log cos (324° 16′)	=	9,9094190
log sin (140° 45′)	=	9,8012015
Comp. log cos (195° 30′)	=	0,0160895 n
Comp. log sin (22° 13′)	=	0,4223817
Comp. log sin (200° 50′)	=	0,4489763 n
log x	=	0,8865426 n
x	=	— 7,70092.

64. Ist der Logarithmus einer Hülfsgröße z. B. der Tangente gegeben, und daraus nur der Logarithmus einer andern, z. B. des Cosinus, zu finden; so braucht man nicht erst den Bogen durch Interpolation zu berechnen; sondern kann unmittelbar den Zuwachs des zweiten aus dem Zuwachs des ersten berechnen.

Viertes Kapitel.

Anwendung der trigonometrischen Hülfsgrößen und Tafeln, ohne Rücksicht auf Dreiecke. (Hülfswinkel.)

---

65. In den vorhergehenden Kapiteln ist alles für den eigentlichen Zweck der Trigonometrie, die Auflösung der Dreiecke, (d. h. die Berechnung ihrer unbekannten Stücke aus den bekannten.) vorbereitet. Die trigonometrischen Hülfsgrößen und Tafeln für sich allein lassen sich aber schon in sehr vielen Fällen zur Auflösung geometrischer und arithmetischer Aufgaben anwenden. Es sollen im Folgenden einige Beispiele von solchen Anwendungen vorgetragen werden.

I. Messen und Auftragen von Winkeln.

66. Wäre Fig. 12. der Winkel $BAC = x$ gegeben, so ist es durch die trigonometrischen Tafeln möglich, ihn vermittelst eines einfachen Maaßstabes genau auszumessen. Man beschreibe zu dem Ende einen Kreisbogen zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Halbmesser AC, und messe diesen sowohl, als auch die Sehne BC auf dem Maaßstabe, wodurch man zwei Zahlen r und c erhält. Nun ist $\frac{\frac{1}{2}c}{r} = \sin \frac{1}{2} x$; man braucht also nur zu $\sin \frac{1}{2} x$ den Bogen in der Tafel zu suchen, und ihn zu verdoppeln um x in Graden u. s. w. zu kennen.

Da ein Winkel immer durch seinen Nebenwinkel gegeben ist; so kann man es immer so einrichten, daß man nur spitze Winkel zu messen, und also Winkel unter 45° aufzuschlagen hat. (Vergl. (61)). Auch wird man, da AC willkührlich ist, für r immer eine Zahl nehmen können, deren Logarithmus man auswendig weiß, z. B. 10, 20, 30, 40, 100 u. s. w.

Denselben Zweck kann man auch erreichen, wenn man auf der Linie AC in C ein Perpendikel CD (in Zahlen $= t$) errichtet; alsdann ist $\frac{t}{r} = \tan x$ und also x gefunden.

67. Sollte umgekehrt der Winkel x an die Linie AC angetragen werden; so würde man $AC = r$ willkührlich annehmen; dann vermittelst der Tafeln $c = 2r \cdot \sin \frac{1}{2} x$ oder $t = r \cdot \tan x$ berechnen, und das gleichschenkliche Dreieck ACB oder das in C rechtwinkliche Dreieck ACD construiren.

II. Vereinfachung algebraischer Gleichungen.

68. Zur numerischen Berechnung algebraischer Gleichungen lassen sich die trigonometrischen Hülfsgrößen besonders dann mit großem Nutzen anwenden, wenn die darin vorkommenden bekannten Größen durch Logarithmen gegeben sind. Man sucht sie alsdann immer auf eine in den trigonometrischen Gleichungen des zweiten Kapitels vorkommende Form zu bringen, und sie durch Einführung eines Hülfswinkels zusammen-

zuziehen, der aus den gegebenen Größen bestimmt werden kann; indem man jede Zahl einer Tangente oder Cotangente, jeden ächten Bruch einem Sinus oder Cosinus gleich setzen kann.

Wäre z. B. $x = a + b$ und a und b in Logarithmen gegeben, so wie auch x in Logarithmen zu finden; so setze man $x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ und $\frac{b}{a} = \text{tang}\, \varphi^2$, das heißt $\text{tang.}\, \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$; so wird nach n. 5 $x = \frac{a}{\cos \varphi^2}$, und man kann den Logarithmus von x berechnen, ohne die Größen a und b erst aus ihren Logarithmen zu bestimmen. — Wäre $x = a - b$, so würde man $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sin \psi$ setzen, und daraus $x = a \cos \psi^2$ haben. — Wäre $x = \sqrt{a + b}$, so setzt man wieder $\sqrt{\frac{b}{a}} = \text{tang}\, \varphi$, woraus $x = \frac{\sqrt{a}}{\cos \varphi}$ wird; wäre $x = \sqrt{a - b}$, so setzt man $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sin \psi$ und erhält $x = \sqrt{a} \,.\, \cos \psi$. — Daß hierbei der Satz (64) angewandt werden kann, bedarf keiner Erinnerung. — Wäre $x = a + b - c + d \ldots$, so könnte man erst $y = a + b$, dann $z = y - c$ u. s. w., setzen, und das vorige unverändert anwenden.

69. Wäre $x = \frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}$, so kann man

den Hülfswinkel auf zweierlei Weise mit gleichem Vortheil einführen:

Sei erstlich $\sqrt{\frac{b}{a}} = \text{tang}\,\varphi$; so wird

$$x = \frac{\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2}{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2} \text{ (nach n. 2.)}$$

$= \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$ (nach n. 1.) $= \cos 2\varphi$ (nach n. 17).
Sind a und b in Logarithmen gegeben, so braucht man auf diese Weise nur zweimal in den Tafeln aufzuschlagen, um den Logarithmus von x zu finden, statt daß man ohne den Hülfswinkel viermal aufschlagen müßte.

Sei zweitens $\frac{b}{a} = \text{tang}\,\psi$; so wird

$$x = \frac{1 - \text{tang}\,\psi}{1 + \text{tang}\,\psi} \text{ oder (da } 1 = \text{tang}\,45^\circ)$$

$$x = \frac{\text{tang}\,45^\circ - \text{tang}\,\psi}{1 + \text{tang}\,45^\circ\,\text{tang}\,\psi} = \text{tang}\,(45^\circ - \psi)$$

(nach n. 13.), wobei man wieder nur zweimal aufzuschlagen hat.

70. Ein besonders merkwürdiges Beispiel von dem Nutzen der Hülfswinkel gewährt die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen vermittelst derselben. Sei z. B. $x^2 + px = q$ so sind die beiden Werthe von x:

A. $x = -\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$

B. $x = -\frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$

Es werde $\frac{4q}{p^2} = \text{tang}\,\varphi^2$;

$$\text{also } \tan\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}, \text{ und } \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{q}\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

daraus wird nun in (A)

$$x = -\frac{\cos\varphi\sqrt{q}}{\sin\varphi}\left(1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right) \text{ (nach n. 5.)}$$

$$= \sqrt{q} \cdot \frac{2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{\sin\varphi} \text{ (nach n. 20.)} = \sqrt{q}\,\tan\tfrac{1}{2}\varphi$$

(nach n. 16. und n. 2.). Die Auflösung der quadratischen Gleichung reducirt sich also auf die Auflösung der beiden trigonometrischen

$\tan\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ und $x = \sqrt{q}\cdot\tan\tfrac{1}{2}\varphi$. — Für (B) wird mit Hülfe der Gleichungen (n. 5; n. 21; n. 16; und n. 2.) $x = -\frac{\sqrt{q}}{\tan\frac{1}{2}\varphi}$. Man braucht also, wenn q und p in Logarithmen gegeben sind, nur zweimal aufzuschlagen, um beide Werthe von x zu haben, statt daß man ohne den Hülfswinkel fünfmal aufschlagen müßte. Die Berechnung ohne Logarithmen wird wegen der Division und Quadratwurzelausziehung in den meisten Fällen noch beschwerlicher.

71. Wäre in der obigen quadratischen Gleichung q negativ, so würde dadurch nur das Zeichen von $\frac{4q}{p^2}$ geändert; setzt man also $\frac{4q}{p^2} = \sin\psi^2$

d. h. $\sin\psi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ und $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{q}}{\sin\psi}$; so wird durch (n. 1; n. 20; n. 16; n. 2.) oder durch (n. 1; n. 21;

n. 16; n. 2.) $x = -\sqrt{q} \cdot \tan \frac{1}{2}\psi$ oder $= -\frac{\sqrt{q}}{\tan \frac{1}{2}\psi}$.

Wäre p negativ, so hätte man ganz dieselben Werthe für x, nur entgegengesetzte Zeichen; also in den vier möglichen Fällen:

$$\underbrace{\overset{(a)}{x^2 + px = +q}; \quad \overset{(b)}{x^2 - px = +q};}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$$

$$x = +\sqrt{q} \tan \tfrac{1}{2}\varphi; \quad -\sqrt{q} \tan \tfrac{1}{2}\varphi; \quad \text{oder}$$

$$x = -\frac{\sqrt{q}}{\tan \frac{1}{2}\varphi}; \quad +\frac{\sqrt{q}}{\tan \frac{1}{2}\varphi};$$

$$\underbrace{\overset{(c)}{x^2 + px = -q}; \quad \overset{(d)}{x^2 - px = -q};}$$

$$\sin \psi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$$

$$x = -\sqrt{q} \tan \tfrac{1}{2}\psi; \quad +\sqrt{q} \tan \tfrac{1}{2}\psi; \quad \text{oder}$$

$$x = -\frac{\sqrt{q}}{\tan \frac{1}{2}\psi}; \quad +\frac{\sqrt{q}}{\tan \frac{1}{2}\psi}.$$

Wäre z. B. die quadratische Gleichung von der Form (a) $x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716}$; so würde die numerische Rechnung so stehen:

$\frac{1}{2}$ log 1695	. .	1,6145848 5
compl. $\frac{1}{2}$ log 12716	.	7,9478247 5
log $\sqrt{q}$	.	9,5624096
log 2	. .	0,3010300
log 44	.	1,6434527
compl. log 7	. .	9,1549020
log tang φ	. .	10,6617943
φ	. .	77° 42′ 31″,71; $\frac{1}{2}\varphi = 38° 51′ 15″,86$
log tang $\frac{1}{2}\varphi$	. .	9,9061115

$\log x \begin{cases} \ldots \ldots & 9{,}4685211 \\ \text{oder} & \\ \ldots \ldots & 9{,}6562981\,n \end{cases}$ also $x = \begin{cases} \ldots 0{,}2941176 \\ \text{oder} \\ -0{,}4532085 \end{cases}$

In dem Fall wo in (c) und (d) $4q > p^2$ und also x imaginär wird, wird auch die trigonometrische Auflösung unmöglich, weil $\sin\psi$ nicht > 1 werden kann.

III. Vereinfachung trigonometrischer Gleichungen.

72. Bei trigonometrischen Gleichungen werden Hülfswinkel häufig deswegen eingeführt, um sie dadurch auf eine von den Formen in n. 8. u. s. w. zu bringen. Ist z. B. x durch die Gleichung $x = a \sin y + b \cos y$ zu finden; so kann man immer die Factoren a und b als gleichhohe Vielfache von den Sinus und Cosinus desselben Hülfswinkels $= (\varphi)$ betrachten. Es sey also $a = n \cos\varphi$, $b = n \sin\varphi$, so hat man

1) $\tang\varphi = \frac{b}{a}$,

2) $n = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi}$ und

3) $x = n(\sin y \cos\varphi + \cos y \sin\varphi) = n \sin(y + \varphi)$.

— Zur Bestimmung von n bleibt die Wahl zwischen zwei Gleichungen; man gebraucht am vortheilhaftesten diejenige, worin die trigonometrische Hülfsgröße am größten ist, weil dadurch das Interpoliren erleichtert wird.

Zweiter Abschnitt.

Erstes Kapitel.

Auflösung der rechtwinklichen und gleichschenklichen ebenen Dreiecke.

73. Bei jedem rechtwinklichen Dreieck kommt der rechte Winkel selbst schon unter den gegebenen Stücken vor. Nennt man nun die drei Seiten des Dreiecks a, b, c, und die drei diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel A, B, C, und setzt für den Fall der rechtwinklichen Dreiecke $A = 90°$; so bleiben, weil unter den gegebenen Stücken immer eine Seite seyn muß, nur folgende Fälle aufzulösen:

	Gegeben	Gesucht
I.	a, B	C, b, c
II.	a, b	B, C, c
III.	b, B	C, a, c
IV.	b, C	B, a, c
V.	b, c	B, C, a

74. Für die Auflösung des rechtwinklichen Dreiecks denkt man sich immer mit einer der gegebenen Seiten als Halbmesser einen Kreisbogen beschrieben, wodurch die andern als die im ersten Kapitel erklärten trigonometrischen Hülfsgrößen erscheinen, die sodann aus den

Winkeln, oder aus denen die Winkel vermittelst der Tafeln berechnet werden können. In Fig. 13. ist demnach:

Für I.

$C = 90° - B$; $b = a \sin B$; $c = a \cos B$.

Für II.

$\sin B = \frac{b}{a} = \cos C$; $c = a \cos B = a \sin C =$
$b \operatorname{tang} C = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Für III.

$C = 90° - B$; $a = \frac{b}{\sin B}$; $c = a \cos B = b \operatorname{cotang} B$.

Für IV.

$B = 90° - C$; $a = \frac{b}{\cos C}$; $c = b \operatorname{tang} C$.

Für V.

$\operatorname{tang} B = \frac{b}{c} = \operatorname{cotg.} C$; $a = \frac{c}{\cos B} = \frac{b}{\sin B}$
$= \sqrt{(c^2 + b^2)}$.

75. Die Auflösung der gleichschenklichen Dreiecke läßt sich auf die der rechtwinklichen zurückführen. Nennt man die Grundlinie b; so ist $a = c$, $A = C$: also bleibt immer nur ein rechtwinkliches Dreieck aufzulösen, worin die Hypotenuse $= a$, die schiefen Winkel A und $\frac{1}{2} B$, und die Katheten $\frac{1}{2} b$ und das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel sind.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Auflösung der ebenen Dreiecke.

---

76. Die rechtwinklichen Dreiecke sind im vorigen Kapitel besonders abgehandelt worden, weil ihre Auflösung am einfachsten ist, und weil dadurch die Auflösung der schiefwinklichen vorbereitet wird, in so fern sie sich durch Fällung von Perpendikeln auf rechtwinkliche zurückführen lassen.

77. Allgemein lassen sich in jedem Dreiecke drei Perpendikel von den Winkelpunkten auf die gegenüberliegenden Seiten oder deren Verlängerungen fällen, und jedes derselben nach (74 I.) auf doppelte Weise durch einen Winkel des Dreiecks ausdrücken. (Vergleiche (11)). Also ist Fig. 14.

$$AD = c \sin B = b \sin C$$
$$BE = a \sin C = c \sin A$$
$$CF = b \sin A = a \sin B.$$

Bringt man die Glieder dieser drei Gleichungen durch Division mit den in ihnen vorkommenden Sinus auf Bruchformen; so findet man die allgemeine Gleichung für alle Dreiecke

n. 34. $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

d. h. in jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Zu einem andern Beweise dieses, für die Auflösung der ebenen schiefwinklichen Dreiecke sehr wichtigen, Lehrsatzes, giebt die Fig. 15. Anleitung.

78. Es sind nun folgende vier Fälle zu unterscheiden:

	Gegeben	Gesucht
I.	$a,\ A,\ B$	$C,\ b,\ c$
II.	$a,\ b,\ C$	$A,\ B,\ c$
III.	$a,\ b,\ A$	$B,\ C,\ c$
IV.	$a,\ b,\ c$	$A,\ B,\ C$

welche jetzt besonders abgehandelt werden sollen.

I. Eine Seite und zwei Winkel sind gegeben ($a,\ A,\ B$)

79. Der dritte Winkel findet sich hier durch die allgemeine Eigenschaft aller Dreiecke: $C = 180° - (A + B)$ Ferner ist:

$$b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B \text{ (nach n. 34.)}$$

$$c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin(A + B) \ldots (11)$$

Wird $A = 90°$; so verwandeln sich diese Formeln, in die in (74) angeführten.

II. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gegeben ($a,\ b,\ C$)

80. Soll hier zuerst der Winkel A gefunden werden; so fälle man Fig. 16. von B ein Perpendikel BD auf b; dadurch wird $BD = a \sin C$; $CD = a \cos C$; $AD = b - a \cos C$; $\tang A = \frac{BD}{AD}$. Daher ist allgemein:

n. 35. $\text{tang}\, A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$ oder

$$\text{cotang}\, A = \frac{b}{a \sin C} - \text{cotg}\, C,$$

ebenso $\text{tang}\, B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$ oder

$$\text{cotang}\, B = \frac{a}{b \sin C} - \text{cotang}\, C$$

Wäre $C > 90°$ (Fig. 17.), so fiele das Perpendikel BD auf die Verlängerung von b, und AD würde $b + a \cos C$; dieser Fall ist in der Formel n. 35. aber schon mitbegriffen, indem $\cos C$ alsdann negativ wird.

Durch Hülfswinkel vereinfacht man die Berechnung dieser Formeln auf folgende Art:

1) Wenn $C < 90°$ setze man in n. 35 $\frac{a \cos C}{b} = \sin \psi^2$, woraus man erhält $\text{tang}\, A = \frac{a \sin C}{b \cos \psi^2}$. Hiebei ist vorausgesetzt, daß $\frac{a \cos C}{b} < 1$, d. h. A spitz sey; wäre dieß nicht, so wäre es doch B, und man würde dieses vermittelst eines Hülfswinkels bestimmen, und dann $A = 180° - (C + B)$ haben. Man wird also immer den Winkel zuerst berechnen, welcher der kleinern gegebenen Seite gegenüberliegt, und also gewiß spitz ist.

2) Wenn $C > 90°$, so setze man in der ersten Formel $\frac{a \cos C}{b} = \text{tang}\, \phi^2$, wobei nur auf die absolute Größe von $\cos C$ Rücksicht zu nehmen ist: daraus

wird tang $A = \frac{a}{b}$ sin C cos φ^2. Hier müssen A und B beide spitz seyn.

81. Noch bequemer findet man A und B auf folgende Art; aus n. 34. folgt:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tang \frac{1}{2}(A+B)}{\tang \frac{1}{2}(A-B)}$$

(nach n. 32). Da nun $A+B$ durch C gegeben, und tang $\frac{1}{2}(A+B) =$ cotang $\frac{1}{2}C$, so hat man $A-B$ und also A und B durch die Gleichung:

$$\text{n. 36.} \quad \tang \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} C.$$

Der geometrische Beweis dieser Formel findet sich auf folgende Art. Man verlängere die größere Seite a, und mache CE und $CF = CA = b$; ziehe FA und AE und mache FG parallel mit AE. Dadurch wird der Winkel $FAE = AFG = 90°$; $CFA = \frac{1}{2}ACE = \frac{1}{2}(A+B)$; $FAG = \frac{1}{2}(A-B)$; $CEA = \frac{1}{2}C$. Denkt man sich nun FA als Halbmesser oder Einheit; so ist

$$\frac{EA}{GF} = \frac{\tang \frac{1}{2}(A+B)}{\tang \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{cotang} \frac{1}{2} C}{\tang \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$= \frac{BE}{BF} = \frac{a+b}{a-b}.$$

82. Wäre z. B. gegeben:

$$C = 143^\circ\, 17'$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 0{,}2034 \\ b = 0{,}3256 \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} \log a = 9{,}3083509 \\ \log b = 9{,}5126844, \end{array}\right.$$

so stände, falls man die Logarithmen von a und b nicht gebrauchen könnte oder wollte, nach (81) die Rechnung so:

$a + b = 0{,}5290$ compl. log $(a + b)$ .. $0{,}2765443$

$a - b = -0{,}1222$ log $(a - b)$ .. $9{,}0870712\ n$

$\frac{1}{2} C = ..\ 71^\circ 38' 30''$ log cotang $\frac{1}{2} C$ ... $9{,}5209395$

$\frac{1}{2}(A + B)$ .. $18^\circ 21' 30''$ log tang $\frac{1}{2}(A - B)$ $8{,}8845550\ n$

$\frac{1}{2}(A - B) - 4^\circ 23' 0'', 89$; $A = 13^\circ 58' 29'', 11$;

$B = 22^\circ 44' 30'', 89$.

Wären die Logarithmen von a und b allein gegeben; so würde man entweder nach (80) haben:

log cos C ... $9{,}9039587$ log tang Φ^2 .. $9{,}6996252$

log tang Φ ... $9{,}8498126$ } vgl.

log $\frac{a}{b}$ .... $9{,}7956665$ log cos Φ ... $9{,}9118451$ } (64)

log sin C ... $9{,}7765983$ A .... $13^\circ 58' 29'', 10$

log cos $^2\Phi$ .. $9{,}8236902$ B .... $22^\circ 44' 30'', 90$

log tang A .. $9{,}3959550$

oder nach n. 36. mit Anwendung von (69)

log $\frac{b}{a}$ = log tang ψ ... $0{,}2043335$

ψ .... $58^\circ\ 0'\ 26'', 18$

$45^\circ - \psi$ .. $-13^\circ . 0' . 26'', 18$

tang $(45^\circ - \psi)$ .... $9{,}3636155\ n$

cotang $\frac{1}{2} C$ .... $9{,}5209395$

log tang $\frac{1}{2}(A - B)$ ... $8{,}8845550\ n$

wie oben.

83. Die dritte Seite des Dreiecks findet man gleichfalls vermittelst der in (80) gebrauchten Construction. Es ist nämlich (Fig. 16.) $c^2 = BD^2 + AD^2 = a^2 \sin C^2 + (b - a \cos C)^2 = a^2 \sin C^2 + b^2 - 2ab \cos C + a^2 \cos C^2$, woraus nach n. 1. wird:

n. 37. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, oder

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$, wobei nur der positive Werth von c gelten kann.

Um die logarithmische Berechnung dieser Gleichung zu erleichtern, bringe man sie auf die Form

$c = \sqrt{(a-b)^2 + 2ab(1 - \cos C)}$

$= \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \sin \frac{1}{2} C^2}$ (n. 20.), und mache $\frac{2\sqrt{a.b} \cdot \sin \frac{1}{2} C}{(a-b)} = \tang \varphi$, wodurch $c = \frac{a-b}{\cos \varphi}$ wird. Oder man setze $\frac{2\sqrt{a.b} \cos \frac{1}{2} C}{(a+b)} = \sin \psi$, wodurch $c = (a+b) \cos \psi$. — Ist $C > 90°$ (Fig. 17.) so ändert sich zwar das Zeichen von $\cos C$; $\sin \frac{1}{2} C$ und $\cos \frac{1}{2} C$ bleiben aber immer positiv.

Demnach wäre für die in (82) gegebenen Stücke:

$\frac{1}{2} \log (a.b)$	9,4105177	$\log (b-a)$ ..	9,0870712
$\log 2$	0,3010300	Comp. $\log \cos \varphi$	0,6149712
Comp. $\log (b-a)$.	0,9129288	$\log c$ ...	9,7020424
$\log \sin \frac{1}{2} C$ ..	9,9773144	c ...	0,5035498
$\log \tang \varphi$ ...	0,6017909		

84. In dem vorigen Satze ist die gesuchte Seite des Dreiecks unabhängig von den Winkeln berechnet;

hat man aber vorher A bestimmt; so wird dadurch

$c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C$, also nach dem vorigen:

log a	9,3083509
log sin C	9,7765983
Comp. log sin A . . .	0,6170932
log c	9,7020424.

III. Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben. (a, b, A).

85. In diesem Fall hat man für B, C, und c nach n. 34. die Gleichungen $\sin B = \sin A \cdot \frac{b}{a}$;

$$C = 180^\circ - (A + B); \quad c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C$$

Es hängt hier alles von der Bestimmung des Winkels B ab. Da aber zu sin B zwei verschiedene Werthe von B gehören, die einander zu 180° ergänzen; so bleibt die Auflösung immer zweideutig, wenn nicht noch außerdem Mittel vorhanden sind, zwischen den beiden durch sin B gefundenen Werthen von B zu entscheiden.

Wenn $a = b$; so ist keine Zweideutigkeit vorhanden, weil alsdann das Dreieck gleichschenklich wird und $B = A$ seyn muß. Wenn $a > b$; so muß $A >$ seyn als B: sin B gehört also immer einem spitzen Winkel an.

Wenn $a < b$; so ist der Winkel B nur $> A$, und es bleibt der Zweifel, ob er stumpf oder spitz sey, außer wenn $a = b \cdot \sin A$ würde, in welchem Fall das Dreieck in B rechtwinklicht wäre.

Dieselbe Unterscheidung des zweideutigen Falls von den nicht zweideutigen ergiebt sich durch geometrische Betrachtung (Fig. 19.), wo A, a, b als gegeben zu betrachten sind, und das Dreieck durch den Durchschnitt des um C mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreises und der unbegränzten dritten Linie AB bestimmt wird.

IV. Drei Seiten sind gegeben (a, b, c).

86. Aus n. 37. folgt unmittelbar

n. 38. $$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

wodurch C aus den drei gegebenen Seiten bestimmt ist. Eben-so erhält man durch bloße Vertauschung der Buchstaben:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a.c.}; \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc.}$$

Geometrisch hat man (Fig. 19.)

$$B'A = \frac{(a+b)(b-a)}{c} = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

also $BB' = c - B'A = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{c}$; aber $\cos B = \frac{\frac{1}{2}BB'}{a}$.

87. Um die Gleichung n. 38. zur logarithmischen Rechnung umzuformen, addire man ihre beiden Glieder zu 1 oder subtrahire sie davon; wodurch man erhält:

$$1 + \cos C = 2 \cos \tfrac{1}{2} C^2 = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}.$$

also α.) $\cos \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)}{ab}\right]}$

$$1 - \cos C = 2 \sin \tfrac{1}{2} C^2 = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a+c-b)\,(b+c-a)}{2\,ab}$$

also β.) $\sin \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(a+c-b)\,(b+c-a)}{ab}\right]}$

oder γ.) $\tan \frac{1}{2} C = \sqrt{\left[\frac{(a+c-b)\,(b+c-a)}{(a+b+c)\,(a+b-c)}\right]}$

bei diesen drei Auflösungen kann keine Zweideutigkeit statt finden, da $\frac{1}{2} C$ immer spitz seyn muß. Auch hat man es dabei in seiner Gewalt, C immer durch die Hülfsgröße zu bestimmen, die seinen Werth am schärfsten giebt (61).

88. Da nach n. 16. $\sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \,.\, \cos \frac{1}{2} C$ so hat man auch

$$\sin C = \frac{1}{2ab} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

oder wenn man $(a+b+c) = S$ setzt.

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{\tfrac{1}{2} S \,.\, (\tfrac{1}{2} S - c)\,(\tfrac{1}{2} S - b)\,(\tfrac{1}{2} S - a)}.$$

Bei dieser Formel findet sich die Bequemlichkeit, daß die Größe unter dem Wurzelzeichen für alle 3 Winkel dieselbe bleibt, also für alle nur einmal zu berechnen ist. Der scheinbaren Zweideutigkeit, welche durch den Sinus des gesuchten Winkels herbeigeführt wird, kann man dadurch immer ausweichen, daß man die beiden

kleinsten Winkel, die man an den kleinern gegenüberliegenden Seiten erkennt, und die immer spitz seyn müssen, zuerst berechnet; wobei sich denn der Dritte von selbst ergiebt.

89. Wäre z. B. wie in (82) und (83)

$a = 0{,}2034000 \quad \log a = 9{,}3083509$

$b = 0{,}3256000 \quad \log b = 9{,}5126844$

$c = 0{,}5035498 \quad \log c = 9{,}7020424$

so würde man nach (88) zuerst A und B suchen. Demnach stände die Rechnung so:

$S = 1{,}0325498$

$\frac{1}{2}S = 0{,}5162749 \quad \log \ldots 9{,}7128811$

$\frac{1}{2}S - a = 0{,}3128749 \quad \log \ldots 9{,}4953708$

$\frac{1}{2}S - b = 0{,}1906749 \quad \log \ldots 9{,}2802935$

$\frac{1}{2}S - c = 0{,}0127251 \quad \log \ldots 8{,}1046612$

$6{,}5932066$

comp. log a 0,6916491

log $\sqrt{}$ ... 8,2966033

log 2 0,3010300

comp. log c ... 0,2979576

comp. log b ... 0,4873156

A .. 13° 58′ 29″ 07 log sin A .. 9,3829065

B .. 22 . 44 . 30,84 log sin B .. 9,5872400

$C = 180° - (A + B)$ .. 143 . 17 . 0,09

oder log sin C .. 9,7765980

C .. 143° 17′ 0″, 11

Die unbedeutende Abweichung dieser Werthe von denen in (82) vorkommenden erklärt sich aus der Unvollkommenheit der Logarithmen, und der überwiegen-

den Größe von c. Nach (87 γ) würde man haben:

$$\begin{array}{lr} \log (\tfrac{1}{2} S - a)(\tfrac{1}{2} S - b) \ldots & 8{,}7756643 \\ \log \tfrac{1}{2} S \quad (\tfrac{1}{2} S - c) \ldots & 7{,}8175433 \\ & 0{,}9581210 \\ \log \tang \tfrac{1}{2} C \ldots & 10{,}4790605 \\ \tfrac{1}{2} C \ldots & 71^\circ . 38' 30'' \\ C \ldots & 143^\circ . 17' 0'' \end{array}$$

90. Sind bei einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, oder nach dem vorigen berechnet; so hat man für den **Inhalt des Dreiecks** die Gleichung:

$$\text{n. 39.} \quad T = \tfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = \tfrac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \tfrac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin A$$

oder wenn man nach (88) die Sinus der Winkel durch die Seiten ausdrückt:

$$\text{n. 40.} \quad T = \sqrt{\tfrac{1}{2} S \cdot (\tfrac{1}{2} S - a)(\tfrac{1}{2} S - b)(\tfrac{1}{2} S - c)}.$$

Wäre in (89) aus den Seiten der Inhalt zu finden; so würde man haben $T =$ num. log . 8,2966033 $= 0{,}019797$, bei welcher Zahl das Quadrat des bei den Seiten gebrauchten Längenmaaßes zur Einheit dient.

Dritter Abschnitt.

Erstes Kapitel.

Allgemeine geometrische Betrachtungen über das sphärische Dreieck.

91. Unter einem sphärischen Dreieck versteht man einen Theil der Kugelfläche, der von dreien Bögen größter Kugelkreise begränzt ist. — Die drei begränzenden Bögen nennt man seine Seiten. Sie gehören dreien Winkeln an, welche am Mittelpunkte der Kugel eine körperliche Ecke bilden, und werden, wie diese in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückt. Es kömmt ihnen also nur eine relative Größe, in Beziehung auf den Halbmesser zu. — Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind die Neigungswinkel der Ebenen ihrer größten Kreise, in so fern man diese auf denselben Halbkugeln mißt, auf denen das Dreieck liegt. Die sphärischen Winkel werden also durch ebene dargestellt, wenn man auf den Durchmessern der Scheitelpunkte perpendikulare Ebenen errichtet. Geht eine solche perpendikulare Ebene durch den Scheitelpunkt selbst; so sind die Schenkel des für den sphärischen Winkel zu setzenden ebenen, Berührungslinien der größten Kreise; geht sie durch den Mittelpunkt der Kugel, so wird zugleich auf der Kugelfläche der Bogen eines

größten Kreises beschrieben, der den sphärischen Winkel mißt; der Scheitelpunkt wird sodann der Pol dieses größten Kreises.

92. Da sich zwei größte Kugelkreise immer in zwei um 180° von einander entfernten Punkten schneiden, bei einem sphärischen Dreieck aber jede zwei Bögen nur einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben; so folgt: daß jede Seite des sphärischen Dreiecks kleiner als 180° vorausgesetzt werde. Die Summe aller drei Seiten muß aber kleiner seyn als 360°, weil sie der Summe der Winkel entspricht, die am Mittelpunkt eine körperliche Ecke bilden. Aus derselben Betrachtung erhellt, daß die Summe je zweier Seiten des Dreiecks zusammen größer, ihr Unterschied aber kleiner ist, als die dritte Seite. Legt man Fig. 20. durch die drei Winkelpunkte eine Ebene; so bildet diese durch ihre Durchschnitte mit den Ebenen der größten Kugelkreise, deren Bögen das sphärische Dreieck begränzen, ein ebenes Dreieck *ABC*. Jeder sphärische Winkel ist aber größer als der entsprechende Winkel des ebenen Dreiecks (weil der Neigungswinkel zweier Ebenen (*A'BC'*) immer größer ist, als der Winkel (*ABC*) den zwei gerade Linien (*AB*, *BC*) in denselben Ebenen, welche mit demselben Theile der Durchschnittslinie (*BK*) spitze Winkel (*ABK* und *CBK*) bilden, in seinem Scheitelpunkt einschließen); also ist die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks immer

größer als 2 Rechte. Aber sie ist auch kleiner als 6 Rechte, da jeder einzelne Winkel kleiner als 2 Rechte ist.

93. Sind die drei Winkelpunkte eines sphärischen Dreiecks (oder seine drei Halbmesser) gegeben; so ist das ganze Dreieck gegeben: denn durch je zwei von ihnen und den Mittelpunkt wird ein größter Kugelkreis bestimmt. Die Neigungen dieser Kugelkreise, in so fern man sie auf denselben Halbkugeln mißt, worauf der jedesmahlige dritte Winkelpunkt liegt, geben die Winkel; ihre zwischen den Winkelpunkten eingeschlossenen Bögen (die kleiner sind als 180°) geben die Seiten. — Sind bloß die drei größten Kugelkreise (oder drei Durchmesser) gegeben, so ist dadurch nicht bloß ein Dreieck, sondern es sind deren acht gegeben, die aber von einander abhängig sind. Denn betrachtet man zuerst eine Halbkugel (Fig. 21.) und nennt die Winkel des einen auf ihr liegenden Dreiecks A, B, C, die Seiten a, b, c; so hat

das Dreieck $A B C'$

die Winkel: $180° - A$, $180° - B$, C;

die Seiten: $180° - a$, $180° - b$, c;

das Dreieck $A B' C$

die Winkel: $180° - A$, B, $180° - C$;

die Seiten: $180° - a$, b, $180° - c$;

das Dreieck $A B' C'$

die Winkel: A, $180° - B$, $180° - C$;

die Seiten: a, $180° - b$, $180° - c$.

Auf der zweiten Halbkugel entstehen vier andere Dreiecke $A'B'C'$, $A'B'C$, $A'BC'$, $A'BC$, deren Halbmesser die Verlängerungen von den Halbmessern der vier vorhergehenden sind, und welche mit ihnen in Winkeln und Seiten vollkommen übereinstimmen, weil ihre Winkel die Scheitelwinkel von den Winkeln der vorhergehenden sind, und ihre Seiten, mit denen der vorhergehenden Dreiecke, Scheitelwinkeln am Mittelpunkte angehören.

94. Zwei sphärische Dreiecke (ABC und $A'B'C'$ Fig. 21 und 22.), deren Winkelpunkte um einen Durchmesser von einander entfernt sind, nennt man entgegengesetzte oder symmetrische Dreiecke. Ihre Seiten und Winkel stimmen nach (93) überein; sie sind aber demungeachtet (wenn nicht noch besondere Bestimmungen hinzukommen) nicht congruent, weil die Ordnung ihrer übereinstimmenden Theile verschieden ist, und man sphärische Dreiecke nicht wie ebene umwenden, sondern nur auf ihrer Kugelfläche verschieben kann, um sie auf einander zu legen.

95. Der Flächeninhalt entgegengesetzter Dreiecke ist gleich. Denn denkt man sich durch ihre Winkelpunkte Ebenen gelegt; so müssen dieselben parallel seyn (weil die Sehnen der Dreiecksseiten, z. B. CB und $C'B'$ (Fig. 22.) je zwei und zwei parallel sind): also müssen sie gleiche Neigungswinkel nicht nur mit den Ebenen der größten Kugelkreise (z. B. $ACKC'A'$), sondern auch mit den zusammengehörigen Halbmessern

(z. B. AK, $A'K$) bilden; da diese letzteren gleich sind, so muß beider Ebenen Entfernung vom Mittelpunkte auch gleich seyn. Durch die Erweiterung derselben werden auf der Kugelfläche congruente kleine Kreise beschrieben, welche also auch congruente Oberflächensegmente begränzen. Von den congruenten und gleichgeneigten Abschnitten dieser kleinen Kreise und der größten Kugelkreise des sphärischen Dreiecks werden congruente Körper (ABA, $A'B'A'$ u. s. w.) begränzt, deren krumme Oberflächen (Zweiecke auf der Kugelfläche) also auch congruent seyn müssen. Zieht man nun diese congruenten Zweiecke von den durch die kleinen Kreise gebildeten congruenten Oberflächensegmenten ab, so bleiben die Oberflächen der entgegengesetzten sphärischen Dreiecke übrig, welche also dem Flächeninhalte nach gleich seyn müssen.

96. Construirt man Fig. 23. die Pole P, P' und Q, Q' zweier größten Kreise, die einen sphärischen Winkel RTS mit einander bilden; so ist zwischen den Paaren benachbarter Pole P und Q, P' und Q der Unterschied, daß P' und Q beide, P und Q nicht beide mit dem Winkel RTS auf denselben durch seine größten Kreise bestimmten Halbkugeln liegen. Man könnte das erste Paar P' und Q in Beziehung auf den Winkel RTS zugewandte, die andern beiden P und Q abgewandte, Pole nennen. P und Q' wären sodann auch zugewandte und mit den entsprechenden P' und Q; so wie das Paar P' und Q' mit dem Paar P und Q gleichbe-

deutend. — Legt man durch die Pole des Winkels RTS einen größten Kreis, so ist vermöge der Construction, der Bogen zwischen den abgewandten Polen dem Winkel selbst, der Bogen zwischen den zugewandten seiner Ergänzung zu 180° gleich.

97. Jedes sphärische Dreieck, welches die Pole von den größten Kreisen eines andern zu Winkelpunkten hat, heißt in Beziehung auf dieses andere, ein Polardreieck. Da der Pole aber sechs sind, so gehören jedem sphärischen Dreieck 8 Polardreiecke an, unter denen 4 wirklich verschieden sind (93). Das Polardreieck $A'B'C'$ nun (Fig. 24 und 25), welches die zugewandten Pole eines andern ABC zu Winkelpunkten hat, hat die Eigenschaft, daß seine Seiten die Winkel des andern, und seine Winkel die Seiten des andern zu 180° ergänzen. Denn wenn A', B', C', die zugewandten Pole des Dreiecks sind; so müssen auch A, B, C, die zugewandten Pole des Dreiecks $A'B'C'$ seyn, weil sonst, wenn z. B. B und B' in Beziehung auf den größten Kreis $A'C'$ auf verschiedenen Halbkugeln lägen, entweder der Winkel BKC, oder BKA oder beide $> 180°$ seyn müßten, welches der in (92) gemachten Voraussetzung, daß jede Seite $< 180°$ widerspräche. — Hieraus folgt nun nach (96) unmittelbar daß

$$B'C' = 180° - A;\ A'C' = 180° - B;\ A'B' = 180° - C;$$
und $A' = 180° - BC$; $B' = 180° - AC$; $C' = 180° - AB$.

Das Polardreieck zwischen den zugewandten Polen

heißt dieser Eigenschaft wegen, das **Supplementardreieck** oder **Ergänzungsdreieck**.

98. Legt man durch die Pole zweier kleinen Kugelkreise einen größten Kreis; so können sie sich auf einer von den beiden dadurch abgeschnittenen Halbkugeln nur einmal schneiden, woraus folgt: daß wenn zwei sphärische Dreiecke auf derselben Kugelfläche drei gleiche Seiten haben, sie entweder congruent oder symmetrisch (entgegengesetzt) sind, und deßwegen auch in ihren Winkeln übereinstimmen müssen. — Hat ein sphärisches Dreieck mit einem andern 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder 2 Winkel und die eingeschlossene Seite gemein; so ist es auch mit ihm entweder congruent oder symmetrisch. — Diese Sätze lassen sich wie in der Planimetrie durch Uebereinanderlegung beweisen; und aus ihnen in Verbindung mit dem Vorigen wieder andere Eigenschaften der sphärischen Dreiecke ableiten, die ihnen zum Theil mit den ebenen gemein sind; z. B. **gleichschenkliche Dreiecke haben gleiche Winkel** an der Grundlinie. — In jedem sphärischen Dreieck liegt dem **größern Winkel die größere Seite** gegenüber und umgekehrt. — Stimmen in zwei Dreiecken zwei Seiten überein, so gehört dem **größeren eingeschlossenen Winkel** auch eine **größere gegenüberstehende Seite** an. — Je nachdem eine Seite, z. B. b Fig. 21. größer oder kleiner ist als $180° - c$; ist auch B größer oder kleiner als $180° - C$.

99. Haben zwei sphärische Dreiecke drei gleiche Winkel, so haben ihre Supplementardreiecke (97) gleiche Seiten, also auch gleiche Winkel (98); woraus folgt, daß sie selbst auch gleiche Seiten haben, und also congruent oder symmetrisch seyn müssen. — Hieraus ergiebt sich, daß bei sphärischen Dreiecken die Winkel allein zur vollständigen Kenntniß des Dreiecks hinreichen, und unter den gegebenen Stücken, nicht wie bei den ebenen nothwendig eine Seite seyn muß.

100. Sind in einem sphärischen Dreieck alle drei Winkel = 90°, so sind es auch alle drei Seiten (weil jeder Winkelpunkt der Pol der ihm gegenüberliegenden Seite wird) und umgekehrt.

Sind in einem sphärischen Dreieck *RTS* oder *RTS'* Fig. 23. zwei Winkel = 90°; so ist der dritte Winkel das Maaß der ihm gegenüberliegenden Seite, und umgekehrt. — Gewöhnlich versteht man unter einem rechtwinklichen sphärischen Dreieck ein solches was nur einen rechten Winkel hat.

101. In einem rechtwinklichen sphärischen Dreieck ist jede Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig (d. h. zugleich größer oder kleiner als 90°). Denn um ein rechtwinkliches Dreieck zu bilden, lege man Fig. 23. durch die Axe *QQ'* irgend einen größten Kreis. Ist nun der Winkel *RTS* kleiner als 90°; so ist es auch sein Maaß *RS*; jeder von den Ebenen *TRT'* und *TST'* abgeschnittene Bogen eines andern durch *QQ'* gelegten größ-

ten Kreises ist aber kleiner als RS, (weil RKS der Neigungswinkel beider Ebenen, und also größer ist als jeder andere aus demselben Scheitelpunkt, dessen Schenkel in denselben Ebenen beide mit KT oder KT' spitze Winkel bilden), also um so mehr kleiner als 90°. Ist der Winkel RTS' größer als 90°; so ist es auch sein Maaß RS', um so mehr also noch jeder Bogen eines andern durch QQ' gelegten größten Kreises, der von den Ebenen TRT' und $TS'T'$ abgeschnitten wird.

102. Sind in einem rechtwinklichen Dreieck beide Katheten gleichartig, so ist die Hypotenuse kleiner als 90°: sind sie ungleichartig, so ist sie größer. — Denn soll Fig. 23. T ein Winkelpunkt eines rechtwinklichen Dreiecks werden, so muß in dem Fall, daß beide Katheten kleiner oder größer als 90° werden sollen, wegen (101) der Scheitelpunkt des rechten Winkels zwischen T und S oder zwischen T' und S' fallen, wo denn immer die Hypotenuse kleiner als TR, d. h. kleiner als 90° seyn wird. Soll aber eine Kathete größer, und die andere kleiner als 90° seyn; so muß der Scheitelpunkt des rechten Winkels zwischen S und T', oder zwischen S' und T fallen, und also die Hypotenuse größer als TR seyn.

103. Da man durch jeden Punkt außer der Ebene eines größten Kreises, einen zweiten größten Kreis auf ihn senkrecht errichten kann; so kann man bei schiefwinklichen sphärischen Dreiecken von jedem Winkelpunkt aus, zwei perpendikulare Kreisbögen auf die

gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung fällen. Eins von diesen sphärischen Perpendikeln fällt wegen (101) auf die Seite selbst, wenn die beiden an ihr liegenden Winkel gleichartig sind: beide aber fallen auf die Verlängerung der Grundlinie, wenn die Winkel an derselben ungleichartig sind.

Zweites Kapitel.

Auflösung der rechtwinklichen und gleichschenklichen sphärischen Dreiecke.

---

104. Um zuerst Beziehungen zwischen den verschiedenen Stücken des rechtwinklichen Dreiecks auszumitteln, fälle man Fig. 26. in dem bei A rechtwinklichen Dreieckes, dessen übrige Theile einstweilen alle kleiner als 90° vorausgesetzt werden, von C die Perpendikel CP und CQ auf die Halbmesser KA und KB. Weil nun dadurch das ebene Dreieck KPQ auch in Q rechtwinklich wird; so ist der Winkel $CQP = B$, und, wenn man den Halbmesser der Kugel $= 1$ setzt, $CQ = \sin a$, $KQ = \cos a$, $CP = \sin b$, $KP = \cos b$; demnach wird $KQ = KP \cos c$ und also

n. 41. $\cos a = \cos b \cdot \cos c$.

Ferner ist $\sin CQP = \frac{CP}{CQ}$ und also

n. 42. $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$.

Eben so ist $\cos CQP = \frac{QP}{QC} = \frac{\cos b \sin c}{\sin a}$, oder nach n. 41. $= \frac{\cos a \sin c}{\cos c \sin a}$; der zweite Ausdruck giebt unmittelbar

n. 43. $\cos B = \frac{\text{tang } c}{\text{tang } a}$;

der erste giebt mit Anwendung von n. 42:

n. 44. $\cos B = \sin C \cos b$.

Endlich ist $\text{tang } CQP = \frac{CP}{QP} = \frac{\sin b}{\cos b \sin c}$, oder nach n. 41. $= \frac{\sin b}{\text{tang } c \cos a}$.

Der erste Ausdruck giebt

n. 45. $\text{tang } B = \frac{\text{tang } b}{\sin c}$; der zweite giebt mit Anwendung von n. 45:

n. 46. $\text{tang } B = \frac{\text{cotang } C}{\cos a}$.

Die Gleichungen n. 43 und 45 ergeben sich unmittelbar, wenn man KQ (für n. 43.) oder KP (für n. 45.) $= 1$ setzt.

Es lassen sich leicht Vergleichungen zwischen diesen Formeln, und denen für die ebenen rechtwinklichen Dreiecke anstellen.

105. Diese Formeln sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß bei dem in A rechtwinklichen Dreiecke alle andern Stücke kleiner als 90°. Sie bleiben aber auch für die beiden übrigen Fälle, wo entweder beide

Katheten und ihre gegenüberliegenden Winkel (101), oder eine mit ihrem Winkel $>90^\circ$ werden, unverändert. — In dem ersten Falle wird eigentlich nur Fig. 21. das Dreieck ABC mit $AB'C'$ vertauscht, wodurch die Fig. 26. gebrauchten Hülfslinien in das mit ABC symmetrische Dreieck $A'B'C'$ fallen, und ihre vorige Bedeutung behalten. Da nun auch ([illegible]) die Hypotenuse spitz, und also auch die Zeichen ihrer trigonometrischen Hülfsgrößen unverändert bleiben; so ändern sich auch, wenn man für B, C, b, c zugleich $180^\circ - B$, $180^\circ - C$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$ setzt, in n. 41 und n. 42. die Zeichen nicht, in den Gleichungen n. 43. bis 46 aber zugleich auf beiden Seiten. — Setzt man aber bloß für C und c ihre Supplemente $180^\circ - C$ und $180^\circ - c$ (d. h. vertauscht man Fig. 21. das Dreieck ABC mit $AB'C$, wodurch die in Fig. 26 gebrauchten Hülfslinien wieder in ihrer alten Lage und Bedeutung in Beziehung auf das Dreieck ABC erscheinen); so wird nach (102) a größer als 90°, und also $\cos a$ und $\tang a$ negativ, und es bleiben daher in n. 42 — 46 auch die Zeichen dieselben, und in der Gleichung n. 41 ändern sie sich zugleich auf beiden Seiten.

106. Es sind nun folgende mögliche Aufgaben zu unterscheiden:

	Gegeben	Gesucht
I.	a, B	C, b, c
II.	a, b	B, C, c
III.	b, B	C, a, c
IV.	b, C	B, a, c
V.	b, c	B, C, a
VI.	B, C	a, b, c

Man findet nun

	1.	2.	3.
für I.	C nach n. 46.	b nach n. 42.	c nach n. 43.
für II.	B nach n. 42.	C nach n. 43.	c nach n. 41.
für III.	C nach n. 44.	a nach n. 42.	c nach n. 45.
für IV.	B nach n. 44.	a nach n. 43.	c nach n. 45.
für V.	B nach n. 45.	C nach n. 45.	a nach n. 41.
für VI.	a nach n. 46.	b nach n. 44.	c nach n. 44.

Die Fälle V. 1 und V. 2, so wie VI. 2 und VI. 3 unterscheiden sich nur durch die willkührlich gewählten Buchstaben, und sind also als gleichbedeutend zu betrachten; so daß im obigen nur 16 wirklich verschiedene Fälle enthalten sind.

107. In den Auflösungen für I. 2: $\sin b = \frac{\sin B}{\sin a}$ und II. 1: $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$; so wie in den drei Auflösungen für III: $\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$; $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$; $\sin c = \frac{\tang b}{\tang B}$ werden die gesuchten Größen durch ihre Sinus bestimmt; doch ist die daraus entstehende Zweideutigkeit in den beiden ersten Fällen nur scheinbar, wegen (101). — Bei III. hingegen liegt die Zweideutigkeit in der Natur der Frage, und läßt sich also nicht heben. Denn ist Fig. 21. außer dem rechten Winkel A noch die Kathete b und der Winkel B gegeben; so giebt es immer zwei Dreiecke ABC und $AB'C$, in welchen diese Stücke übereinstimmen, bei denen sich

aber die übrigen zu 180° ergänzen. — Oder: soll Fig. 23. T der eine schiefe Winkel eines rechtwinklichen Dreiecks werden, und nur noch seine gegenüberliegende Kathete gegeben seyn; so muß man, um die Hypotenuse zu bestimmen, mit dem Complement dieser Kathete, welches nach (101) größer ist als QR, einen kleinen Kreis um Q beschreiben; wodurch aber zwei Durchschnitte auf dem Bogen TRT' entstehen, die beide der Aufgabe Genüge leisten.

108. Legt man bei einem gleichschenklichen sphärischen Dreiecke durch die Spitze und die Mitte der Grundlinie einen größten Kreis, so wird es dadurch, nach (98) in zwei symmetrische rechtwinkliche zerfällt, seine Auflösung also, wie bei den ebenen Dreiecken, auf die Auflösung der rechtwinklichen zurückgeführt.

Drittes Kapitel.

Auflösung der schiefwinklichen sphärischen Dreiecke.

---

109. Fällt man nach (103) in einem sphärischen Dreieck, von jedem Winkelpunkt einen senkrechten größten Kreis auf die gegenüberliegende Seite; so läßt sich dessen Sinus nach n. 42. immer auf doppelte Weise durch den Sinus einer der übrigen Seiten und ihren anliegenden Winkel ausdrücken; woraus die allgemeine Gleichung entspringt:

n. 47. $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$.

Dieselbe Gleichung ergiebt sich, wenn man Fig. 27. oder 28. das von dem Punkt C auf die Ebene ABK gefällte Perpendikel CP, durch die Größen A, B, a, b doppelt ausdrückt.

110. Werden Fig. 27. von dem Punkt C aus, außer CP noch die Linien CO und CQ auf die beiden Halbmesser KA und KB senkrecht gefällt; so wird $CQP = B$; $COP = A$; $CQ = \sin a$; $CO = \sin b$; $KQ = \cos a$; $KO = \cos b$. Fällt man nun noch OR senkrecht auf KB, und PS senkrecht auf OR; so wird $SOP = c$; also $KR = KO \cos c = \cos b \cos c$; $RQ = SP = PO \sin c = CO \cos A \sin c \ldots = \sin b \sin c \cos A$; aber $KQ = KR + RQ$: also

n. 48. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Diese Formel ist zunächst für den Fall abgeleitet, wo alle Stücke des Dreiecks kleiner sind als 90°. — In jedem andern Fall läßt sich aber dieselbe Construction machen, nur daß die durch Cosinus ausgedrückten Hülfslinien eine entgegengesetzte Lage bekommen, und also ihr Zeichen ändern können, wie z. B. Fig. 28. wo für $A > 90°$, $SP = RQ$ negativ wird. — Die Gleichung gilt also allgemein für alle sphärischen Dreiecke, wenn man nur auf die Abwechselung der Zeichen gehörige Rücksicht nimmt. —

111. Wendet man n. 48. auf das Supplementardreieck (97) an; daß also $\cos a' = \cos b' \cos c'$

$+ \sin b' \sin c' \cos A'$; setzt für a', b', c', A' ihre Werthe aus dem Hauptdreieck, und verändert in allen Gliedern das Zeichen; so erhält man

n. 49. $\cos A = - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$.

112. Setzt man Fig. 27. oder 28. $CO = 1$; so wird $KO = \mathrm{cotg}\, b$; $RO = \mathrm{cotg}\, b . \sin c$; $CP = \sin A$; $QP = CP \,\mathrm{tang}\, PCQ = \sin A \,\mathrm{cotang}\, B$; $SO = \ldots$ PO; $\cos POS = \cos A . \cos c$; aber $RO = QP + SO$: also $\mathrm{cotang}\, b \sin c = \sin A \,\mathrm{cotang}\, B + \cos c \cos A$, oder wenn man b mit a vertauscht

n. 50. $\mathrm{cotang}\, a \sin c = \sin B \,\mathrm{cotang}\, A + \cos c \cos B$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich wie in (111) durch Hülfe des Supplementardreiecks

n. 51. $\mathrm{cotang}\, A \sin C = \sin b \,\mathrm{cotang}\, a - \cos C \cos b$.

113. Die bisher angeführten Gleichungen n. 47-51. sind hinreichend um alle bei sphärischen Dreiecken vorkommenden Aufgaben zu lösen, wie im folgenden erhellen wird. Doch wird ihre Auflösung manchmal sehr erleichtert, wenn man statt ihrer andere gebraucht, in denen nicht die Stücke des Dreiecks selbst, sondern nur ihre Hälften vorkommen. Alle diese Formeln finden sich folgendermaaßen auf einmal aus den bisher abgeleiteten.

Da nach n. 47. $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$;

so ist $\sin A^2 \sin b \sin c = \sin a^2 \sin B \sin C$; also

$$(1 + \cos A)(1 - \cos A) \sin b \sin c$$
$$= (1 + \cos a)(1 - \cos a) \sin B \sin C:$$

Löst man nun in dieser Gleichung nach einander die Parenthesen:

$(1 - \cos A)$ und $(1 + \cos a)$,
$(1 - \cos A)$ und $(1 - \cos a)$,
$(1 + \cos A)$ und $(1 + \cos a)$,
$(1 + \cos A)$ und $(1 - \cos a)$

auf, drückt die übrigbleibenden Parenthesen nach n. 20. und 21. und die Producte $\cos A \sin b \sin c$ und $\cos a \sin B \sin C$ nach n. 48. und n. 49. durch $\cos a - \cos b \cos c$ und $\cos A + \cos B \cos C$ aus, und wendet auf die so entstandenen Ausdrücke die Gleichungen n. 9. und n. 11. an; so erhält man folgende vier Gleichungen:

A. $2 \cos \frac{1}{2} A^2 [\cos (b - c) - \cos a]$
$= 2 \sin \frac{1}{2} a^2 [\cos (B - C) + \cos A]$

B. $2 \cos \frac{1}{2} A^2 [\cos (b - c) - \cos a]$
$= 2 \cos \frac{1}{2} a^2 [- \cos (B + C) - \cos A]$

C. $2 \sin \frac{1}{2} A^2 [- \cos (b + c) + \cos a]$
$= 2 \sin \frac{1}{2} a^2 [\cos (B - C) + \cos A]$

D. $2 \sin \frac{1}{2} A^2 [- \cos (b + c) + \cos a]$
$= 2 \cos \frac{1}{2} a^2 [- \cos (B + C) - \cos A]$

Die Größen $\cos (b - c)$, $\cos a$ u. s. w. lassen sich nun nach n. 20. und 21. zweifach, in $(1 - 2 \sin \frac{1}{2} (b - c)^2)$ u. s. w. oder in $(2 \cos \frac{1}{2} (b - c)^2 - 1)$ u. s. w. umgestalten. Man kann also diese Umgestaltung immer so einrichten, daß nicht nur die letzten Glieder beider Seiten, sondern auch auf jeder Seite die $+1$ und -1 sich aufheben. — Dividirt man nun nach dieser Umgestaltung auf beiden Seiten mit 4, und zieht die Quadratwurzel aus; so erhält man:

aus A.

n. 52. $\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c)=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C)$

aus B.

n. 53. $\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c)=\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C)$

aus C.

n. 54. $\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c)=\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B-C)$

aus D.

n. 55. $\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b+c)=\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B+C)$

Daß in diesen Gleichungen die Zeichen beider Seiten übereinstimmen müssen, (worüber durch die vorgenommene Wurzelausziehung ein Zweifel herbeigeführt ist), erhellt aus (92) und (98).

Wenn man nun nach einander n. 52. durch n. 53.
n. 54. durch n. 55.
n. 52. durch n. 54.
n. 53. durch n. 55.
dividirt; so erhält man

n. 56. $\tan\frac{1}{2}(b-c)=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\tan\frac{1}{2}a$

n. 57. $\tan\frac{1}{2}(b+c)=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\tan\frac{1}{2}a$

n. 58. $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A$

n. 59. $\tan\frac{1}{2}(B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A$ *).

*) Die Gleichungen n. 56-59. sind schon von Neper (a. 1614), die Gleichungen n. 52-55. aber erst durch Gauß theoria motus corp. coel. 1809. in den Gebrauch eingeführt.

114. Es sind bei den schiefwinklichen sphärischen Dreiecken folgende sechs Fälle zu unterscheiden:

	Gegeben	Gesucht.
I.	c, b, a	C, B, A
II.	c, b, A	C, B, a
III.	c, b, C	B, A, a
IV.	c, C, B	A, b, a
V.	a, B, C	A, c, b
VI.	C, B, A	c, b, a

deren Auflösung nun einzeln vorgetragen werden soll.

I. Alle drei Seiten sind gegeben (c, b, a).

115. Es findet sich hier einer der Winkel z. B. A, zunächst nach n. 48. Also $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$.

Um diese Gleichung zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten, addire man ihre beiden Seiten zu 1 oder ziehe sie davon ab; daraus ergiebt sich

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c} \text{ nach n. 9; oder nach n. 27;}$$

$$= \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} (a + b + c) \sin \tfrac{1}{2} (b + c - a)}{\sin b \sin c},$$

also α.) $\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left[\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + b + c) \sin \tfrac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c}\right]}$;

Eben so findet sich aus

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

$$\beta.)\ \sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left[\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)\ \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\ \sin c}\right]}$$

oder durch Verbindung von beiden Ausdrücken

$$\gamma.)\ \mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2}A \sqrt{\left[\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}\right]}.$$

Man kann von diesen drei Ausdrücken nach den Umständen den wählen, der $\frac{1}{2}A$ am schärfsten giebt (61). — Daß keiner von den hier unter den Wurzelzeichen begriffenen Sinus negativ werden könne, erhellt aus (92).

II. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gegeben (c, b, A).

116. Die dritte Seite findet sich hier unmittelbar durch n. 48.

$$\cos a = \cos b \ \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A.$$

Doch kann diese Gleichung zur logarithmischen Rechnung bequemer eingerichtet werden, wenn man nach (72) einen Hülfswinkel einführt. Sey also $\cos b = n \sin \varphi$; $\sin b \ \cos A = n \cos \varphi$; so wird

$$\mathrm{tang}\ \varphi = \frac{\mathrm{cotang}\ b}{\cos A}; \text{ und also } \cos a = \frac{\cos b}{\sin \varphi} \cdot \sin (c+\varphi).$$

Wäre z. B. $A = 114^\circ\ 20'\ 16''$; $b = 56^\circ\ 19'\ 40''$; $c = 20^\circ\ 16'\ 38''$ so hätte man

cotang b ...	9,8236157	cos b ...	9,7438553
Comp. cos A ...	0,3849814 n	Comp. sin φ .	0,0703566 n
tang φ ...	0,2085971 n	sin $(c+\varphi)$ ..	9,7891698 n
φ ..	$-58^\circ 15' 34'', 13$	cos a ...	9,6033817
$c+\varphi$ ..	$-37^\circ 58' 56'', 13$	a ...	$66^\circ\ 20'\ 44'', 09$

Es bleibt diese Auflösung aber immer mangelhaft, wenn $\cos a$ nahe an ± 1, d. h. wenn a klein oder nahe an 180° ist, (61).

117. Soll einer der beiden übrigen Winkel z. B. C gefunden werden; so kann man sich dazu der Gleichung n. 51. bedienen. Nach ihr ist:

$$\text{cotang}\, C = \frac{\sin b \ \text{cotang}\, c - \cos A \cos b}{\sin A}.$$

Setzt man hier $\text{cotang}\, c = n \cos \psi$; $\cos A = n \sin \psi$; so wird $\text{tang}\, \psi = \cos A \ \text{tang}\, c$ und $\text{cotang}\, C = \frac{\text{cotang}\, A}{\sin \psi} . \sin (b - \psi)$.

Demnach stände in dem Beispiel des vorigen Satzes die numerische Rechnung also:

$\cos A$	9,6150186 n	$\text{cotang}\, A$	9,6554374 n
$\text{tang}\, c$	9,5675667	$\text{Comp}\sin \psi$	0,8223913 n
$\text{tang}\, \psi$ ...	9,1825853 n	$\sin (b - \psi$	9,9572232
ψ ..	$-8^\circ 39' 26'', 48$	$\text{cotang}\, C$	0,4350519
$b - \psi$ ...	$64^\circ 59' 6'', 48$	C ...	$20^\circ 9' 54'' 62$

118. Weit vortheilhafter aber bedient man sich um die Winkel zu finden, der Formeln n. 58 und n. 59, welche durch die halbe Summe und die halbe Differenz beide Winkel zugleich geben:

In obigem Beispiel ist $\frac{1}{2}A = 57^\circ 10' 8''$

$\frac{1}{2}(b+c) = 38^\circ 18' 9''$

$\frac{1}{2}(b-c) = 18^\circ 1' 31''$; demnach ist

$\sin\frac{1}{2}(b-c) \ldots 9{,}4905716$ $\quad$ $\text{tang}\,\frac{1}{2}(B-C) \ldots 9{,}5080217$

$\text{Comp.}\sin\frac{1}{2}(b+c)\; 0{,}2077391$ $\quad$ $\frac{1}{2}(B-C) \ldots 17^\circ 51' 17'',80$

$\text{cotang}\,\frac{1}{2}A \ldots 9{,}8097110$

$\cos\frac{1}{2}(b-c) \cdot 9{,}9781441$ $\quad$ $\text{tang}\,\frac{1}{2}(B+C) \ldots 9{,}8931242$

$\text{Comp.}\cos\frac{1}{2}(b+c)\; 0{,}1052691$ $\quad$ $\frac{1}{2}(B+C) \ldots 38^\circ 1' 12'',45$

also $B = 55^\circ 52' 30'', 25$; $C = 20^\circ 9' 54'', 65$.

Man erhält hier mit fünfmaligem Aufschlagen beide Winkel, da man in (117), um einen zu finden, eben so oft aufschlagen mußte.

119. Mit noch größerem Vortheil gebraucht man um beide Winkel und die unbekannte Seite auf einmal zu finden, die Gleichungen n. 52 — n. 55.

Es ist demnach in dem obigen Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
[1] \ldots \sin \frac{1}{2}(b-c) & \ldots & 9{,}4905716 \\
[2] \ldots \cos \frac{1}{2} A & \ldots & 9{,}7341311 \\
[3] \ldots \cos \frac{1}{2}(b-c) & \ldots & 9{,}9781441 \\
\hline
\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2}(B-C) & \ldots & 9{,}2247027 \ldots [1]+[2] \\
\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2}(B-C) & \ldots & 9{,}7166810 \ldots [4]+[5] \\
\hline
\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B-C) & \ldots & 9{,}5080217 \\
\frac{1}{2}(B-C) & \ldots & 17^{0}\,51'\,17'',80 \\
\cos \frac{1}{2}(B-C) & \ldots & 9{,}9785620 \; ^{*)} \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
[4] \ldots \sin \frac{1}{2}(b+c) & \ldots & 9{,}7922609 \\
[5] \ldots \sin \frac{1}{2} A & \ldots & 9{,}9244201 \\
[6] \ldots \cos \frac{1}{2}(b+c) & \ldots & 9{,}8947309 \\
\hline
\cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2}(B+C) & \ldots & 9{,}7122752 \ldots [2]+[3] \\
\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2}(B+C) & \ldots & 9{,}8191519 \ldots [5]+[6] \\
\hline
\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B+C) & \ldots & 9{,}8931242 \\
\frac{1}{2}(B+C) & \ldots & 38^{0}\,1'\,12'',45 \\
\cos \frac{1}{2}(B+C) & \ldots & 9{,}8964129 \; ^{*)} \\
\end{array}
$$

Hieraus folgt nun:

$$
\begin{array}{lll}
\sin \frac{1}{2} a \ldots & 9{,}8381190 & \text{und } B = 55^{0}\,52'\,30'',25 \\
\cos \frac{1}{2} a \ldots & 9{,}9227381 & \quad C = 20^{0}\,9'\,54'',65 \\
\hline
\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \ldots & 9{,}8153809 & \quad a = 66^{0}\,20'\,44'',12 \\
\frac{1}{2} a \ldots & 33^{0}\,10'\,22'',06 & \\
\end{array}
$$

Man erhält hier mit sechsmaligem Aufschlagen alle drei unbekannten Größen durch Tangenten, also immer scharf

*) Es wird hier (um $\sin \frac{1}{2} a$ und $\cos \frac{1}{2} a$ zu bestimmen) entweder der Cosinus oder der Sinus aufgeschlagen, je nachdem der eine oder der andere größer, und also zum Interpoliren bequemer ist.

bestimmt. Ein anderer nicht zu übersehender Vortheil dieser Auflösung ist, daß man in ihr selbst ein Mittel findet, etwanige Rechnungsfehler zu entdecken; man braucht zu dem Ende nur, wenn $\frac{1}{2}a$ gefunden ist, noch seinen Cosinus oder Sinus aufzuschlagen und ihn mit dem in der Rechnung vorkommenden zu vergleichen.

III. Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben (C, b, c).

120. Hier findet sich zuerst der eine von den beiden übrigen Winkeln, welcher der zweiten gegebenen Seite gegenübersteht nach n. 47.

$$\sin B = \frac{\sin b \sin C}{\sin c}.$$

121. Zur Auffindung von A kann man sich der Gleichung n. 51. bedienen. Es ist darnach

$$\text{cotang } C \sin A + \cos b \cos A = \sin b \text{ cotang } c.$$

Setzt man nun $\text{cotang } C = n \cos \varphi$; $\cos b = n \sin \varphi$, so wird $\text{tang } \varphi = \cos b \text{ tang } C$ und

$$\sin (A + \varphi) = \sin \varphi \text{ tang } b \text{ cotang } c;$$

wodurch sich also $(A + \varphi)$ und, durch Abziehung von φ, A selbst ergiebt.

122. Für die dritte Seite a giebt n. 48.

$$\cos C \sin a \sin b + \cos b \cos a = \cos c.$$

Setzt man $\text{tang } \psi = \frac{\text{cotang } b}{\cos C}$; so wird

$$\sin (a + \psi) = \sin \psi \frac{\cos c}{\cos b},$$ wodurch sich a ergiebt.

123. Da hier die gesuchten Grössen immer durch Sinus bestimmt werden, so ist im Allgemeinen die Auflösung zweideutig. Es sind also noch 1) die Fälle zu unterscheiden, wo die Zweideutigkeit in der Natur der Frage liegt, oder wo sie sich aus den Umständen der Aufgabe heben läßt; 2) ist zu entscheiden, wie viele und welche Combinationen aus den sechs gefundenen Grössen gemacht werden können.

Sey deßhalb Fig. 29. C oder C' der Scheitelpunkt des gegebenen Winkels C, und CA oder $C'A = b$; so wird die Zweideutigkeit nur dann wirklich statt finden können, wenn beide Durchschnitte des mit der zweiten gegebenen Seite c um A beschriebenen kleinen Kreises und des größten Kreises CQC' auf dieselbe Seite der Linie CKC' fallen; im entgegengesetzten Fall werden freilich auch zwei Dreiecke entstehen, bei denen b und c gemeinschaftlich sind, es wird aber nur dem einen der Winkel C selbst, dem andern der Winkel $180° - C$ angehören. — Legt man nun eine Ebene durch A, K und den Pol des größten Kreises CQC'; so wird dadurch der Neigungswinkel der Linie AK gegen ihn (AKQ) construirt, und jeder Bogen eines andern größten Kreises, der von A aus nach irgend einem Punkte von $CQC'Q'C$ gehen soll, muß größer seyn als AQ und kleiner als AQ' (weil der spitze Neigungswinkel einer Linie gegen eine Ebene kleiner ist als alle andere Winkel, die sie mit Linien in der Ebene macht). Diese beiden Bögen sind also die Gränzen, zwischen denen c immer enthalten seyn muß. (Wird c einem von ihnen gleich; so entsteht ein rechtwinkli-

ches Dreieck; wäre c nicht zwischen ihnen enthalten, so wäre die Aufgabe selbst unstatthaft.) — Ferner folgt nach (101) und (98), daß jeder Bogen eines durch A gelegten größten Kreises, die Bögen CQ, QC', $C'Q'$, $Q'C$ nur schneiden könne, wenn er der Größe nach zwischen AC und AQ, zwischen AQ und AC u. s. w. liegt. — Ist also c kleiner als b und $180^\circ - b$ (welches nur für ein spitzes C der Fall seyn kann), oder ist c größer als b und $180^\circ - b$ (welches nur für ein stumpfes C geschehen kann); so giebt es immer zwei Durchschnitte auf derselben Seite von CKC' (B, B' oder B'', B'''), welche der Aufgabe Genüge leisten, und die Zweideutigkeit ist also nothwendig. — Ist $c = b$ oder $= 180^\circ - b$; so fällt immer einer von den Punkten B, B' u. s. w. mit C oder C' zusammen; die Zweideutigkeit verschwindet also, und es bleibt nur ein gleichschenkliches Dreieck aufzulösen. — Liegt endlich c der Größe nach zwischen b und $180^\circ - b$; so können die zusammengehörigen Durchschnitte nur auf die Bögen QC' und $Q'C$, also auf entgegengesetzte Seiten von CKC' fallen und die Zweideutigkeit verschwindet ebenfalls. — Demnach bleibt nur eine wirkliche Zweideutigkeit übrig, wenn c größer oder kleiner ist als b und dessen Supplement.

124. Daß aus den sechs Größen, die vermittelst der drei Sinus in (120) — (122) gefunden werden können, überhaupt nur zwei Combinationen möglich seyen, erhellt schon daraus, daß zwei Kugelkreise sich nur in zwei Punkten schneiden können. — Daß ferner

bei gegebenen b und c einem größern A auch ein grösseres a angehöre, ist aus (98) bekannt. — In den wirklich zweideutigen Fällen wird nun endlich das größere A auch das Perpendikel AQ oder AQ' enthalten; woraus nach (103) folgt: daß man in diesen Fällen das größere A mit dem größeren a und dem mit C gleichartigen B zu verbinden habe, wodurch sich denn die zweite Verbindung von selbst ergiebt.

In dem nur scheinbar zweideutigen Fall (wo c zwischen b und 180° — b enthalten ist) fällt c auf verschiedene Seiten von b, wodurch A sowol als a zwei Werthe bekommt, von denen nur einer unter 180° ist, welcher also allein der Frage Genüge leistet. — Da ferner hier die beiden Durchschnitte nur auf den Bögen QC' und CQ' statt finden können; so muß B immer mit demjenigen der beiden Perpendikel AQ oder AQ' gleichartig seyn, dessen Fußpunkt dem gegebenen Scheitelpunkt C oder C' zunächst liegt (also weniger als 90° von ihm entfernt ist). Wegen (102) ist aber eben dieses nächste Perpendikel immer mit der gegebenen Seite b gleichartig, woraus folgt, daß man in diesem Fall, außer den überstumpfen A und a noch das mit b ungleichartige B zu verwerfen habe *).

*) Negative Werthe von A oder a können hierbei immer nach (6) durch Hinzufügung von 360° in positive verwandelt werden.

125. Wäre z. B. gegeben

$C = 20^\circ\, 9'\, 54'',65$; $b = 56^\circ\, 19'\, 40''$; $c = 20^\circ\, 16'\, 38''$;

so würde man nach den Formeln in (120) — (122) haben:

$\sin b$	.. 9,9202397	$\cos b$	.. 9,7438553
$\sin C$	.. [illegible]	$\mathrm{tang}\, C$	.. 9,564[illegible]
Comp. $\sin c$	.. 0,4602181	$\mathrm{tang}\, \varphi$	.. 9,3088036
$\sin B$	.. 9,9179341	φ	.. $11^\circ\, 30'\, 31'',66$
		$\sin \varphi$	.. 9,2999848
also $B =$	$55^\circ\, 52'\, 30'',34$	$\mathrm{cotang}\, c$	.. 0,4324333
oder $=$	$124^\circ\, 7'\, 29'',66$	$\mathrm{tang}\, b$	.. 0,1763843
		$\sin (A + \varphi)$	.. 9,9088004

$A + \varphi = 54^\circ\, 9'\, 12'',49$

oder $= 125^\circ\, 50'\, 47'',51$

$\mathrm{cotang}\, b$	... 9,8236157
Comp. $\cos C$	... 0,0274720
$\mathrm{tang}\, \psi$	... 9,8510877
ψ	$35^\circ\, 21'\, 50'',85$
$\sin \psi$	... 9,7625066
$\cos c$	... 9,9722152
Comp. $\cos b$	... 0,2561447
$\sin (a + \psi)$	... 9,9908665

$a + \psi = 78^\circ\, 17'\, 25'',69$

oder $= 101^\circ\, 42'\, 34'',31$

also $A = 42^\circ\, 38'\, 40'',83$ $\quad a = 42^\circ\, 55'\, 34'',84$

oder $= 114^\circ\, 20'\, 15'',85$ $\quad$ oder $= 66^\circ\, 20'\, 43'',46$

Aus der Ableitung in (120) — (122) folgt:

$\dfrac{\sin (A + \varphi)}{\sin (a + \psi)} = \dfrac{\sin \varphi}{\sin \psi} \cdot \dfrac{\sin b}{\sin c}$, welche Gleichung

ein Mittel an die Hand giebt, die logarithmische Rech-

nung zu prüfen. In dem vorigen Beispiel ist

$$(121)\ \log \frac{\sin \Phi}{\sin \psi} \ldots\ldots 9{,}5374762$$

$$\log \frac{\sin b}{\sin c} \ldots\ldots \underline{0{,}3804578}$$

$$\qquad 9{,}9179340$$

$$\frac{\sin.(A+\Phi)}{\sin.(a+\psi)}$$

Weil der obige Fall nach (123) ein wirklich zweideutiger ist, so wird man nach (124) die beiden zuletzt angegebenen Werthe von A und a mit $B = 55^\circ\ 52'\ 30'',34$ die beiden ersten aber mit $B = 124^\circ\ 7'\ 29'',66$ zu verbinden haben.

Wäre gegeben $C = 130^\circ$; $b = 120^\circ$; $c = 75^\circ$; so würde man auf dieselbe Weise finden:

$$\Phi = 30^\circ\ 47' \qquad \psi = 41^\circ\ 56'$$

$$A + \Phi = 193^\circ\ 45' \qquad a + \psi = 200^\circ\ 14'$$

$$\text{oder} = 346^\circ\ 15' \qquad \text{oder} = 339^\circ\ 46'$$

$$B = 43^\circ\ 23' \qquad A = 162^\circ\ 58' \qquad a = 158^\circ\ 18'$$

$$\text{oder} = 136^\circ\ 37' \qquad \text{oder} = 315^\circ\ 28' \qquad \text{oder} = 297^\circ\ 50'$$

Hier ist nur eine Auflösung möglich, weil c zwischen b und $180^\circ - b$ enthalten ist, und also nach (124) $B = 136^\circ\ 37'$; $A = 162^\circ\ 58'$; und $a = 158^\circ\ 18'$; zu nehmen.

126. Wird B zuerst allein berechnet; so kann man daraus, in Verbindung mit den bekannten Größen, A und a durch die Gleichungen n. 58 und n. 59 oder n. 56 und 57 finden; wodurch der nachtheilige Einfluß vermieden wird, den die Bestimmung durch den Sinus auf die Genauigkeit der beiden letzten Größen haben kann;

wenn $(A + \varphi)$ oder $(a + \psi)$ sehr nahe an 90° liegen. — Nur wird man in den wirklich zweideutigen Fällen die Rechnung für beide Werthe von B wiederholen müssen. Es ist z. B. nach n. 59.

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)} \cdot \text{cotang}\ \tfrac{1}{2}(B + C)$$

und nach n. 57.

$$\text{cotang}\ \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\cos \frac{1}{2}(B + C)} \cdot \text{cotang}\ \tfrac{1}{2}(b + c).$$

Für $B = 55° \cdot 52' 39'', 34$ wird man in dem ersten der obigen Beispiele haben:

$\frac{1}{2}(B + C) \ldots 38° 1' 12'', 50$ $\frac{1}{2}(b + c) \ldots 38° 18' 9''$
$\frac{1}{2}(B - C) \ldots 17° \cdot 51' 17'', 85$ $\frac{1}{2}(b - c) \ldots 18° 1, 31''$

also

$\cos \frac{1}{2}(B - C)$	. . 9,9785620
Comp. $\cos \frac{1}{2}(B + C)$	. . 0,1035872
$\text{cotang}\ \frac{1}{2}(b + c)$	. . 0,1024700
$\text{cotang}\ \frac{1}{2} a$	. . 0,1846192
$\frac{1}{2} a$	. . 33° 10' 22'', 04
a	. . 66° 20' 44, 08

$\cos \frac{1}{2}(b - c)$	. . 9,9781441
Comp. $\cos \frac{1}{2}(b + c)$	. . 0,1052691
$\text{cotang}\ \frac{1}{2}(B + C)$	. . 0,1068756
$\text{tang}\ \frac{1}{2} A$	. . . 0,1902888
$\frac{1}{2} A$	. . 57° 10' 7'', 96
A	. . 114° 20' 15'', 92

wo a zuverlässiger ist wie oben.

127. Die drei bisher abgehandelten Fälle sind eigentlich schon hinreichend, um alle Aufgaben zu lösen, die bei sphärischen Dreiecken vorkommen können; man

brauchte nämlich nur in IV. V. und VI. statt des Dreiecks selbst sein Supplementardreieck nach III. II. und I. aufzulösen, und könnte sodann die gefundenen Größen wieder rückwärts auf das Hauptdreieck übertragen. Doch lassen sich die folgenden Fälle auch ohne Hülfe des Supplementardreiecks durch die obigen allgemeinen Gleichungen auflösen.

IV. Zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite sind gegeben (c, C, B).

128. Man findet hier auf eine ganz ähnliche Art wie (120) — (122) durch n. 47.

$$\sin b = \frac{\sin c \sin B}{\sin C}.$$

Für a hat man n. 50. $\text{cotang}\, C \sin a + \cos B \cos a = \sin B \,\text{cotang}\, C$ und also 1) $\text{tang}\, w = \cos B \,\text{tang}\, c$ 2) $\sin (a + w) = \sin w \,\text{tang}\, B \,\text{cotang}\, C$. Für A hat man n. 49. $\cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B = \cos C$ also 1) $\text{tang}\, \varphi = \frac{\text{cotang}\, B}{\cos c}$ 2) $(\sin A - \varphi) = \sin \varphi \frac{\cos C}{\cos A}$

Wollte man zuerst b bestimmen und mit dessen Hülfe a und A finden; so würde man dabei dieselben Gleichungen wie in (126) gebrauchen.

129. Daß in diesem Falle eben so wie im vorigen eine Zweideutigkeit vorkommen kann, erhellt schon daraus, daß das Supplementardreieck hier unter dem vorigen Fall begriffen ist. Eben dadurch aber läßt sich die Unterscheidung der nothwendig zweideutigen von den nur scheinbar zweideutigen Fällen, so wie die Ausnahme

telung, der in den letzteren allein brauchbaren Auflösungen, ganz auf (123) und (124) zurückführen. — Man findet nämlich, wenn man diese Sätze auf das Supplementardreieck anwendet, und seine gesuchten Stücke wieder in die gesuchten des Hauptdreiecks umsetzt: daß die Aufgabe nur dann wirklich zweideutig ist; wenn C kleiner oder größer als B und dessen Supplement; und daß in diesem Fall das größere A mit dem größeren a und dem mit c ungleichartigen b zu verbinden sey; daß hingegen in dem nur scheinbar zweideutigen Fall, eben so wie oben die überstumpfen Werthe von A und a, so wie das mit B ungleichartige b zu verwerfen sey.

V. Zwei Winkel und die eingeschlossene Seite sind gegeben (a, B, C).

130. Will man hier die gesuchten Größen einzeln bestimmen; so wird man die sie enthaltenden Gleichungen auf ganz ähnliche Art wie in (116) und (117) geschehen ist, zur logarithmischen Rechnung bequemer einrichten können.

Es ist nämlich nach n. 49.

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \text{ also}$$

$$1)\ \tang \varphi = \frac{\cotang B}{\cos a}\quad 2)\ \cos A = \frac{\cos B}{\sin \varphi} \sin(C - \varphi);$$

und nach n. 50. $\cotang c = \dfrac{\sin B \cotang C + \cos a \cos B}{\sin a}$

also 1) $\tan \psi = \cos a \tan C$;

2) $\cot c = \frac{\cot a}{\sin \psi} \sin (B + \psi)$.

131. Mit demselben Vortheil wie in (118) kann man sich hier der Gleichungen n. 56. und n. 57. bedienen, um beide gesuchte Seiten zugleich zu finden. — Noch vorzüglicher bleibt aber auch hier die Anwendung der Gleichungen n. 52 — n. 55. wodurch alle drei gesuchten Stücke auf einmal gefunden werden.

Wäre z. B. wie oben $B = 55° 52' 30'', 25$;
$C = 20° 9' 54'', 65$; $a = 66° 20' 44'', 12$;
so wäre $\frac{1}{2} a = 33° 10' 22'', 06$
$\frac{1}{2}(B + C) = 38° 1' 12'', 45$
$\frac{1}{2}(B - C) = 17° 51' 17'', 80$

man würde also nach n. 56. und n. 57. haben:

$\sin \frac{1}{2}(B - C) \ldots 9,4865837$ | $\tan \frac{1}{2}(b - c) \ldots 9,5124275$
Comp. $\sin \frac{1}{2}(B + C)\ 0,2104629$ | $\frac{1}{2}(b - c) \ldots 18° 1' 30'', 99$

$\tan \frac{1}{2} a \ldots 9,8153809$

$\cos \frac{1}{2}(B - C) . 9,9785620$ | $\tan \frac{1}{2}(b + c) \ldots 9,8975300$
Comp. $\cos \frac{1}{2}(B + C)\ 0,1035871$ | $\frac{1}{2}(b + c) . 38° 18' 9'', 01$

also $b = 56° 19' 40'', 00$; $c = 20° 16' 38'', 02$.

Nach n. 52 — n. 55: würde die Rechnung so stehen:

[1] . . $\sin \frac{1}{2}(B - C)$ . . 9,4865857
[2] . . $\sin \frac{1}{2} a$ 9,7381190
[3] . . $\cos \frac{1}{2}(B - C)$ . . 9,9785620

$\cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2}(b - c)$ . . 9,2247027 . . [1]+[2]
$\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(b - c)$ . . 9,7122751 . . [4]+[5]

$\tan \frac{1}{2}(b - c)$ . . 9,5124276
$\frac{1}{2}(b - c)$ . . 18° 1′ 31″,01
$\cos \frac{1}{2}(b - c)$ . . 9,9781441

[4] . . $\sin \frac{1}{2}(B + C)$ . . 9,7895371
[5] . . $\cos \frac{1}{2} a$ 9,9227380
[6] . . $\cos \frac{1}{2}(B + C)$ . . 9,8964129

$\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2}(b + c)$ . . 9,7166810 . . [2]+[3]
$\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(b + c)$ . . 9,8191509 . . [5]+[6],

$\tan \frac{1}{2}(b + c)$ . . 9,8975301
$\frac{1}{2}(b + c)$ . . 38° 18′ 9″,05
$\cos \frac{1}{2}(b + c)$ . . 9,8947309

Hieraus folgt nun:

$\sin \frac{1}{2} A$ . . 9,9244200 und $b = 56° 19′ 40″,04$
$\cos \frac{1}{2} A$ . . 9,7341310 $\quad c = 20° 16′ 38″,02$
$\tan \frac{1}{2} A$ . . 0,1902890 $\quad A = 114° 20′ 16″,02$
$\frac{1}{2} A$ . . 57° 10′ 8″,01

VI. Drei Winkel sind gegeben (A, B, C).

132. Die Seiten finden sich hier nach n. 49. Darnach ist nämlich $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$ = also

hat man, wenn man eben so wie in (115) umgestaltet, wieder die Wahl zwischen folgenden drei Gleichungen:

$$\alpha)\ \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\ \cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\ \sin C}\right]}$$

$$\beta)\ \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left[\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\ \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\ \sin C}\right]}$$

$$\gamma)\ \tang\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left[-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\ \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\ \cos\frac{1}{2}(A+C-B)}\right]}.$$

Es darf nicht befremden, daß in β und γ die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ erscheint; denn nach (92) ist $A+B+C$ immer größer als 180° und kleiner als 540°, es muß also $\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ auch immer negativ seyn, wodurch jene erste Negation wieder aufgehoben wird. Daß aber die übrigen unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Cosinus nie negativ werden können, läßt sich folgendermaßen darthun. Es ist nach (92) im Supplementardreieck $c' < a' + b'$; also im Hauptdreieck $180° - C < 360° - A - B$, d. h. $A + B - C < 180°$.

133. Sind bei einem sphärischen Dreieck die drei Winkel gegeben, oder aus andern gegebenen Stücken berechnet; so findet sich sein Flächeninhalt (T) auf folgende Weise:

Es ist für den Halbmesser r, der Halbkugel Oberfläche $= 2\pi r^2$ oder wenn man sich die Bögen in Thei-

ken des Halbmessers ausgedrückt denkt $= 360^\circ . r^2$. — Nach dieser letzten Vorstellung ist also Fig. 21. die krumme Oberfläche des Kugelausschnitts $AC'A'B'A = 2\,Ar^2$, die Oberfläche $BAB'CB = 2\,Br^2$, die Oberfläche $CAC'BC = 2\,Cr^2$. — Also ist mit Hülfe von (95) $2\,Ar^2 + 2\,Br^2 + 2\,Cr^2 = 360^\circ . r^2 + 2\,T$, das heißt:

n. 60. $T = (A + B + C - 180^\circ) . r^2$.

Verbesserungen.

Seite	11	in der	letzten	Zeile:	fehlt vor $-\sec\alpha$ das Zeichen: $=$
⸗	20	⸗ ⸗	4ten	⸗	lies n. 9. statt n. 10.
⸗	49	⸗ ⸗	11ten	⸗	fehlt vor: setze das Wörtlein: so
⸗	51	⸗ ⸗	20ten	⸗	lies $\log\cos\varphi^2$ statt $\log\cos{}^2\varphi$
⸗	56	⸗ ⸗	3ten	⸗	l. dritte statt Dritte
⸗	67	⸗ ⸗	12ten	⸗	l. Dreiecke st. Dreieckes
⸗	73	⸗ ⸗	8ten	⸗	l. $PO\cos POS$ st. $PO:\cos POS$

Tab. III. Fig. 23. muß die gerade Linie *KS* den Durchschnittspunkt der beiden größten Kreise *QPR* und *TST* treffen.

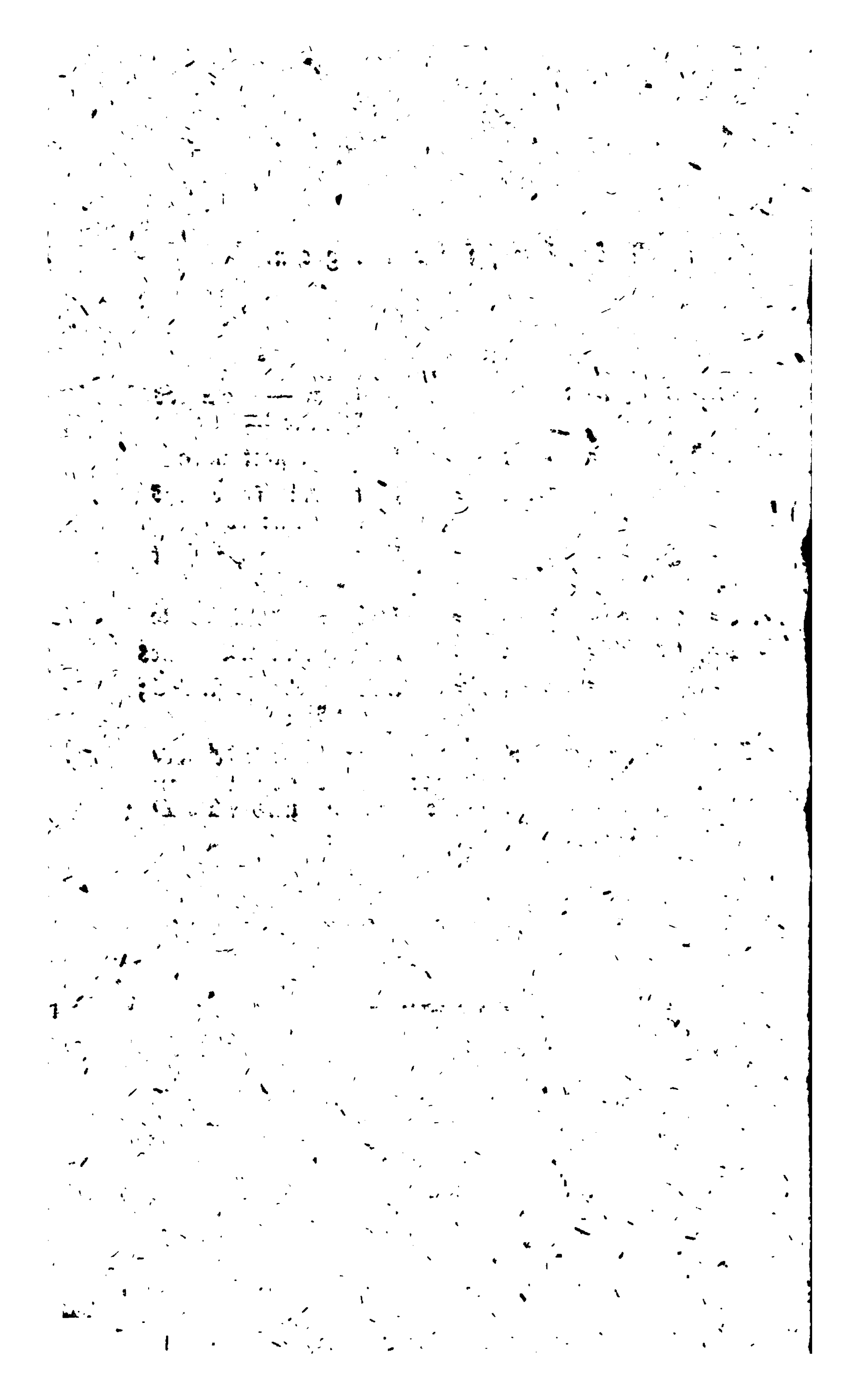


Fig. 2.

Fig. 5.

Fig. 8.

Tab. II.

Fig. 11.

C O M K

Fig. 12.

B D A x C

Fig. 16.

C a D b B c A

Fig. 17.

D C a b B c A

C D A

Fig. 19.

P C E B D B′ A

Tab. III.

Fig. 22.

Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 29.